UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO (2212)

GUÍA DE PROBLEMAS

- LICENCIATURA EN BIOTECNOLOGÍA

2017

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA


UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN

Director - Decano
Pablo A. TAVILLA

Licenciatura en Relaciones del Trabajo
Coordinadora - Vicedecana
Sandra M. PÉREZ

Licenciatura en Administración
Coordinador - Vicedecano
Pablo A. TAVILLA (a cargo)

Licenciatura en Economía
Coordinador - Vicedecano
Alejandro L. ROBBA

Contador Público Nacional
Coordinador - Vicedecano
Alejandro A. OTERO

DEPARTAMENTO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Directora - Decana
M. Patricia JORGE

Licenciatura en Trabajo Sicial
Coordinadora - Vicedecana
M. Claudia BELZITI

Licenciatura en Comunicación Social
Coordinador - Vicedecano
Roberto C. MARAFIOTI

Ciclo de Licenciatura en Educación Secundaria
Coordinadora - Vicedecana
Lucía ROMERO

Ciclo de Licenciatura en Educación Inicial
Coordinadora - Vicedecana
Nancy B. MATEOS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Director - Decano
Jorge L. ETCHARRÁN

Ingeniería en Electrónica
Coordinador Vicedecano
Daniel A. ACERBI (int)

Licenciatura en Gestión Ambiental
Coordinador - Vicedecano
Jorge L. ETCHARRÁN

Licenciatura en Biotecnología
Coordinador - Vicedecano
Fernando C. RAIBENBERG (int)

DEPARTAMENTO DE ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

Directora - Decana
N. Elena TABER (a cargo)

Arquitectura

Coordinadora - Vicedecana

N. Elena TABER (int.)

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
(2212)

GUÍA DE PROBLEMAS
2017

Nicodemo, Mauro
Introducción al cálculo 2212 : guía de problemas año 2017 / Mauro Nicodemo. - 1a ed . - Moreno : UNM Editora, 2017.
Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-3700-56-9

1. Cálculo. 2. Matemática. I. Título.
CDD 512

Colección: Cuadernillos de Cátedra
Directora: Adriana M. del H. SÁNCHEZ
Autor: Mauro NICODEMO
Colaboradores: Rosa M. ESCAYOLA
Diego MELCHIORI

1.ª edición: abril de 2017

Av. Bartolomé Mitre N.° 1891, Moreno (B1744OHC),
prov. de Buenos Aires, Argentina
Teléfonos:
(0237) 466-7186 / 1529 / 4530
(0237) 488-3151 / 3147 / 3473
(0237) 425-1786 / 1619
(0237) 462-8629
(0237) 460-1309
Interno: 154
unmeditora@unm.edu.ar
http://www.unm.edu.ar/editora

La edición en formato digital de esta obra se encuentra disponible en:
http://www.unm.edu.ar/repositorio/repositorio.aspx
ISBN (version digital): 978-987-3700-56-9

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

REUN
RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO
Editora

L U A
Libro Universitario Argentino

Parte I

Números, conjuntos numéricos y ecuaciones.

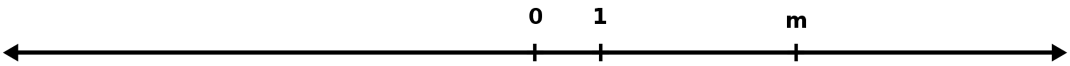
Unidad 1: Números reales

Conjuntos numéricos, recta numérica y distancias.

Números enteros y números racionales

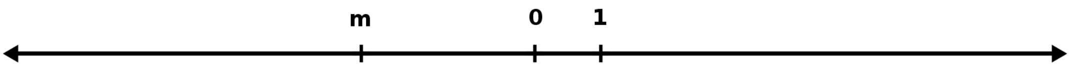
Problema 1 Ubicá los siguientes números en la recta numérica.

a) -1
b) 3
c) $m+1$
d) $m+(-1)$
e) $-m+2$
f) $-m-1$
g) $\frac{m}{2}$
h) $\frac{m}{2}+1$
i) $\frac{m+2}{2}$



Problema 2 Ubicá los siguientes números en la recta numérica.

a) -2
b) 4
c) $m+1$
d) $m+(-1)$
e) $-m+2$
f) $-m-1$
g) $\frac{m}{2}$
h) $\frac{m}{2}+1$
i) $\frac{m+2}{2}$



Problema 3 Ubicá los siguientes números en una misma recta numérica.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{8}{3}$ e) $-\frac{7}{3}$ f) $\frac{9}{3}$

Problema 4 Ubicá los siguientes números en una misma recta numérica.

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$ e) $-\frac{6}{2}$ f) $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$

Problema 5 Ubicá todos los números listados en los dos problemas anteriores en la misma recta numérica.

Problema 6 Ubicá los siguientes números (que son resultados de operaciones) en una recta numérica.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
b) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
c) $-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$
d) $-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$
e) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$
f) $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$
g) $\frac{2}{3}-\frac{3}{2}$
h) $-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$

Problema 7 Para cada par de números, marcalos en la misma recta numérica y calculá la distancia que hay entre ellos.

a) 1 y 3.
b) 7 y 13.
c) -1 y 4.
d) -5 y -1.
e) $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.
f) $-\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.
g) $\frac{1}{5}$ y $-\frac{3}{2}$.
h) $-\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$.

Problema 8 Para cada uno de los conjuntos dados:

- Armá todas las parejas de números posibles.
- Calculá la distancia entre los números de cada pareja de manera geométrica y aritmética.

a) $A=\left\{0;2;\frac{3}{2}\right\}$
b) $B=\left\{0;-1;-\frac{1}{5};\frac{4}{3}\right\}$
c) $C=\left\{-\frac{1}{2};\frac{4}{3};\frac{2}{5};3\right\}$

Números reales e intervalos

Problema 9 Ubicá de manera aproximada los siguientes números en la recta numérica.

$$\sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{5} \quad ; \quad -\sqrt{5} \quad ; \quad -\sqrt{5}+1 \quad ; \quad \sqrt{7}-1 \quad ; \quad \pi \quad ; \quad e \quad ; \quad \frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

Problema 10 Para cada uno de los números del problema anterior escribí los números racionales de cuatro cifras decimales más cercanos a ellos: uno mayor y uno menor.

Problema 11 Obtené el valor redondeado y truncado a cinco cifras decimales de los siguientes números.

$$\sqrt{2}+1 \quad ; \quad \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sen}(60°) \quad ; \quad \cos(45°) \quad ; \quad e^3$$

Problema 12 En cada caso, marcá en una recta numérica todos los números reales que cumplen con las siguientes condiciones.

a) Mayores que 2.
b) Menores que -3.
c) Menores o iguales que -3.
d) Mayores o iguales que $-\frac{5}{11}$.
e) Menores o iguales que $\frac{7}{5}$.
f) Menores que 2 y mayores que -3.
g) Mayores que 4 y menores que 10.

h) Menores que 4 o mayores que 10.
i) Menores que 4 y mayores que 10.
j) Mayores que 4 o menores que 10.
k) Negativos y mayores que $\frac{2}{3}$.
l) Mayores que $\sqrt{2}$ y menores o iguales que $\frac{10}{3}$.
m) Mayores que $\sqrt{3}$ y menores que -2
n) Mayores que $\sqrt{3}$ ó menores que -2.
ñ) Mayores que 5 y mayores que $-\sqrt{7}$.
o) Mayores que 5 o mayores que $-\sqrt{7}$.
p) Menores que 5 y menores que $-\sqrt{7}$.
q) Menores que 5 o menores que $-\sqrt{7}$.

Problema 13 Marcá en una recta numérica con distintos colores:

a) todos los números que se encuentran a distancia 3 del número 2;
b) todos los números que se encuentran a distancia menor que 3 del número 2;
c) todos los números que se encuentran a distancia mayor que 3 del número 2.

Problema 14 Marcá en una recta numérica todos los valores de x que cumplen con cada condición.

a) $|x-3|=1$
b) $|x-3|>1$
c) $|x-3|\leq 1$
d) $|x-1|<7$
e) $|x-1|=0$
f) $|x-1|<0$
g) $|x-1|>0$
h) $|x-2|\geq 1$
i) $\left|x-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{3}$
j) $|x+4|\geq 2$
k) $\left|x+\frac{1}{2}\right|<1$
l) $\left|x+\frac{1}{3}\right|=4$

Problema 15 Escribí los conjuntos solución del problema anterior como intervalos o unión de intervalos.

Unidad 2: Ecuaciones e inecuaciones

Tipos de ecuaciones, cantidad de soluciones y tipos de soluciones.

Ecuaciones e inecuaciones con una incógnita

Problema 1 Encontrá el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 1 = 4$

b) $x + 2 = -3$

c) $x - \frac{1}{2} = 2$

d) $x + \frac{1}{3} = -\frac{2}{5}$

e) $3x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{2}x + 1 = -1$

g) $2x + 4 = \frac{7}{3} - x$

h) $\frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2} - 2x$

i) $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 2x - 3$

Problema 2 Encontrá el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $|x + 3| = 5$

b) $|2 - x| = 1$

c) $|x - 5| = \frac{1}{2}$

d) $|x - 4| = 0$

e) $|x - 2| = -3$

f) $\left|\frac{1}{3}x + 1\right| + 2 = 0$

g) $|3x - 1| = \frac{1}{3}$

h) $\left|\frac{1}{2}x + 1\right| - 3 = 0$

i) $\left|7 - \frac{5}{2}x\right| = 2$

j) $3 - \left|\frac{1}{2}x + 2\right| = 1$

k) $4 - |3x + 1| = 5$

l) $|2x - 1| + 7 = 7$

Problema 3 Para cada uno de los siguientes conjuntos armá una ecuación cuya solución sea ese conjunto.

a) $S_1 = \{3\}$

b) $S_2 = \{-1\}$

c) $S_3 = \{1; 5\}$

d) $S_4 = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

e) $S_5 = \{-3; 1\}$

f) $S_6 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

g) $S_7 = \{-2; 2\}$

h) $S_8 = \emptyset$

Problema 4 Describí los conjuntos del **Problema 12** de la página 7 de manera simbólica utilizando inecuaciones y, si es posible, utilizando módulos.

Problema 5 Para cada una de las siguientes inecuaciones, escribí su solución como intervalos o unión de intervalos y decidí si los valores -10, -3, -1, 2 y 6 pertenecen o no a la solución.

a) $x \leq 4$

b) $x < 9$

c) $-3 \geq x$

d) $x > -\frac{1}{2}$

e) $-\frac{5}{4} > x$

f) $x > -3 \wedge x \leq 5$
(Tené en cuenta que el símbolo “$\wedge$” quiere decir “y”.)

g) $-\frac{10}{3} < x < -1$

h) $-7 \leq x < \frac{1}{3}$

i) $x < -1 \vee 6 \leq x$

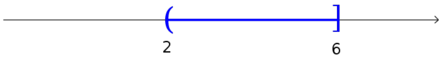
(Tené en cuenta que el símbolo "$\vee$" quiere decir "o".)

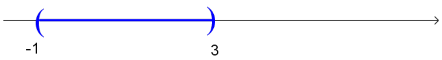
j) $x \leq -\frac{7}{3} \vee x > \frac{1}{2}$

k) $x < -3 \wedge x \geq 5$

l) $x < -1 \wedge 6 \leq x$

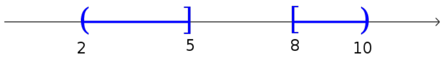
Problema 6 Describí los siguientes conjuntos de manera simbólica utilizando inecuaciones y, si es posible, utilizando módulos.

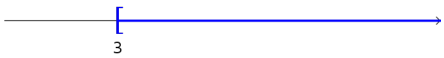
a) 

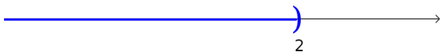
b) 

c) $(-4;-1)$

d) $(-\infty;1) \cup (2;7]$

e) 

f) 

g) 

h) $(-1;+\infty)$

Problema 7 Resolvé las siguientes ecuaciones.

a) $x-2=0$

b) $x+2=0$

c) $(x-2)(x+2)=0$

d) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0$

e) $-2\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)=0$

f) $x(3x+6)=0$

g) $(2x+1)\left(x+\frac{3}{4}\right)(x-2)=0$

h) $0{,}5(2x-1)(x+0{,}25)(x+3)(x-0{,}8)=0$

Problema 8 Determiná todos los valores de x que hacen verdadera cada una de las desigualdades.

a) $x-2<0$

b) $x+2<0$

c) $(x-2)(x+2)<0$

d) $(x+1)(x-5)<0$

e) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)>0$

f) $-2\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)>0$

g) $x(3x+6)<0$

h) $4\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)>0$

i) $(-2x+4)(3x-1)<0$

j) $(-2x+4)(3x-1)>0$

k) $(-2x+4)(-3x+1)>0$

Ecuaciones con dos incógnitas y sistemas de ecuaciones

Problema 9 Un crucero tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones de cada tipo tiene?

Problema 10 Con dos camiones cuyas capacidades de carga son de 3 y 4 toneladas respectivamente, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

Problema 11 Paula y Pablo hacen paletas de chocolate para vender. La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta $\$5$ y para una paleta chica $\$3$. Si disponen de $\$570$ y quieren hacer 150 paletas, ¿cuántas paletas de cada tamaño podrán hacer?

Problema 12 Para cada una de las ecuaciones, graficá en un sistema de ejes cartesianos todos los pares ordenados $(x; y)$ que la verifican.

a) $x + y = 8$
b) $x - y = 0$
c) $2x - y = 1$
d) $-x = 2 + 2y$

Problema 13 Para cada uno de los siguientes pares de ecuaciones:

- Encontrá todos los valores de x e y que verifican las dos ecuaciones simultáneamente.

a) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -4x + 4 \\ y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \\ y = -\frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y + \frac{1}{4}x = -3 \\ y = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2y - \frac{1}{3}x = -7 \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} y + x = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6y = 4x - 6 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6y = 4x - 8 \end{cases}$

Problema 14 En una fábrica tienen máquinas de tipo A y máquinas de tipo B. La semana pasada se dio mantenimiento a 5 máquinas de tipo A y a 4 de tipo B por un costo de $\$3405$.La semana anterior se pagó $\$3135$ por dar mantenimiento a 3 máquinas de tipo A y 5 de tipo B. ¿Cuál es el costo de mantenimiento de las máquinas de cada tipo?

Problema 15 Don José y don Tiburcio fueron a comprar semillas para sembrar. Don José compró cuatro sacos de maíz y tres sacos de trigo, y don Tiburcio compró tres sacos de maíz y dos de trigo. La carga de don José fue de 480 kilogramos y la de don Tiburcio de 340. ¿Cuánto pesaban cada saco de maíz y cada saco de trigo?

Problema 16 Resolvé los siguientes sistemas de ecuaciones de manera analítica y gráfica. Corroborá los resultados con un programa graficador.

a) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x = 5 - 2y \\ y - \frac{3}{2}x = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x = 6 - 3y \\ 2y = 4 + 3x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2y + 3x = 6 \\ 4y = 2x \end{cases}$

f) $\begin{cases} -y + 3x = 6 \\ x = 2 + \frac{1}{3}y \end{cases}$

g) $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y = 0 \\ x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{6} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 7 = -3y + \frac{4}{5}x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} -x = -2y + \frac{3}{4} \\ 3y - x = \frac{1}{4} \end{cases}$

Parte II

Funciones I

Unidad 3: Funciones lineales

Ecuación de la recta, modelos lineales y áreas entre rectas.

Ecuación de la recta

Problema 1 En un sistema de ejes cartesianos:

a) graficá los puntos $(1; 2)$ y $(2; 4)$;
b) graficá tres puntos más que estén alineados con los anteriores y escribí sus coordenadas.
c) Para cada uno de los siguientes puntos, calculá el valor de y para que queden alineados con los puntos anteriores.
   (i) $(0; y)$
   (ii) $(7; y)$
   (iii) $(23; y)$
   (iv) $(79; y)$
d) ¿Qué cuenta se debe hacer con el valor de x para obtener el valor de y de manera que el punto $(x; y)$ esté alineado con el resto de los puntos?
e) Escribí la ecuación de la recta a la que pertenecen todos los puntos de este problema.

Problema 2 Realizá lo mismo que en el **Problema 1** para los siguientes pares de puntos:

- $(1; 3)$ y $(2; 5)$
- $(2; 5)$ y $(4; 4)$
- $(2; -1)$ y $(3; -4)$
- $(-2; 1)$ y $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$
- $(-3; -1)$ y $(-1; 0)$
- $(3; 2)$ y $(6; -3)$

Problema 3 Dibujá las siguientes rectas e indicá si son paralelas, perpendiculares u oblicuas entre sí.

a) $y = 3x - 1$
b) $y = -2x + 3$
c) $y = \frac{1}{2}x + 1$
d) $y = 3x + 2$

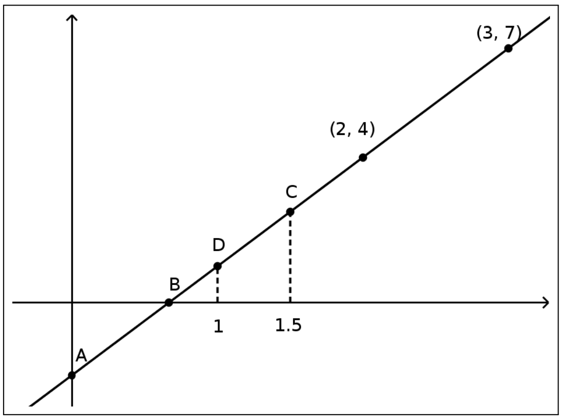
e) $y = -\frac{1}{3}x - 5$

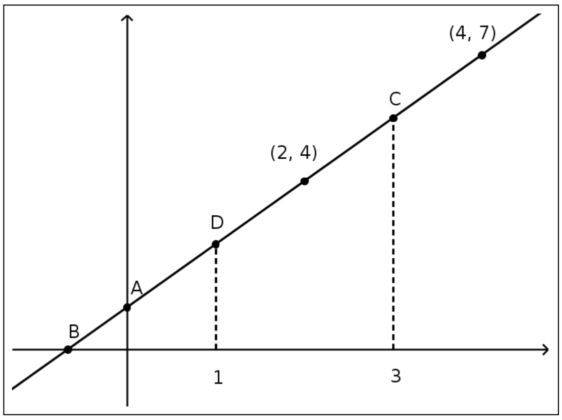
f) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

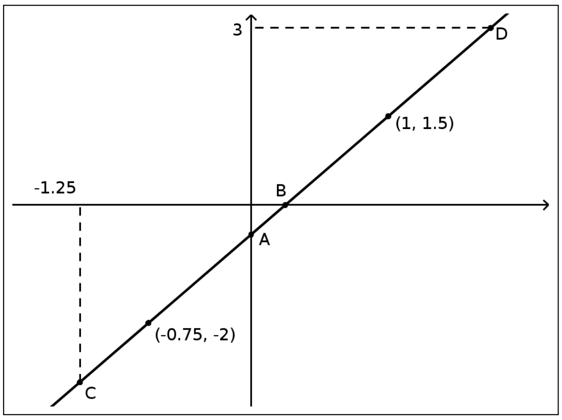
Problema 4 Para cada uno de los siguientes gráficos:

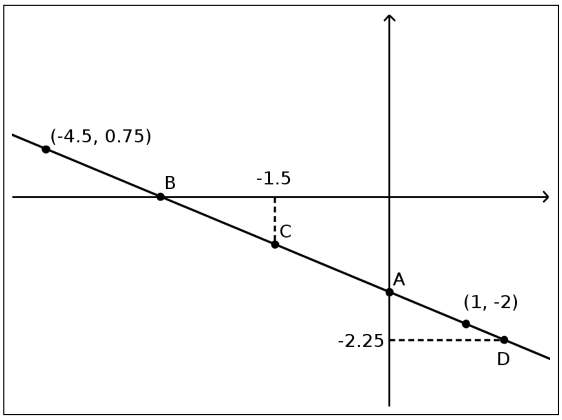
a) Hallá la ecuación de la recta.

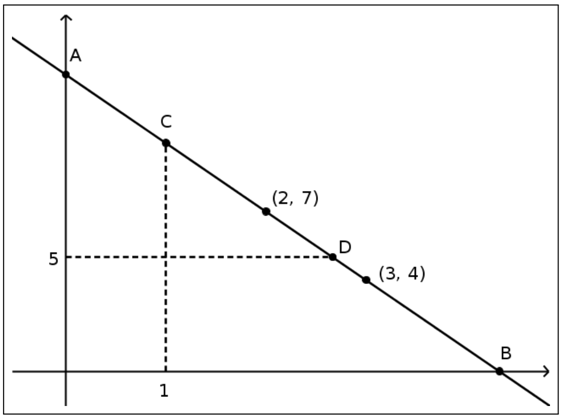
b) Da las coordenadas de los puntos A, B, C y D.

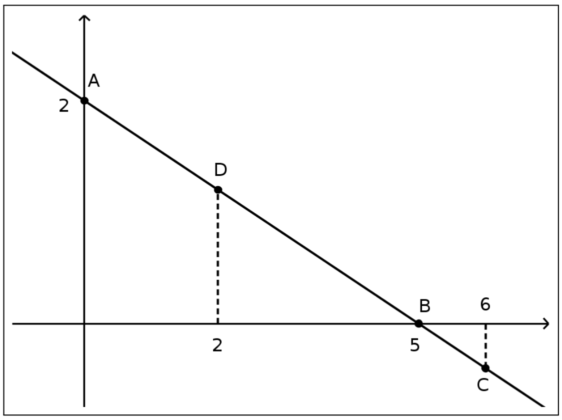












Problema 5 Hallá, en cada caso, la función lineal cuyo gráfico contiene a los puntos que se indican:

a) $(2;5)$ y $(4;9)$

b) $(-3;2)$ y $(-1;3)$

c) $\left(\frac{1}{2};2\right)$ y $\left(\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right)$

d) $(-1;3)$ y $(2;0)$

e) $(-2;3)$ y $(4;3)$

f) $(1;4)$ y $(1;5)$

Problema 6 Hallá la ecuación de una recta que posea las características que se indican en cada uno de los siguientes casos.

a) Su pendiente es 4 y contiene al punto $(-1;-2)$.
b) Su ordenada al origen es 5 y contiene al punto $\left(\frac{2}{3};1\right)$.
c) Contiene a los puntos $(2;1)$ y $(5;-1)$.
d) Interseca al eje de las abscisas en $x=-2$ y contiene al punto $\left(4;-\frac{4}{5}\right)$.
e) Su pendiente es $\frac{2}{3}$ y contiene al punto $(3;-1{,}5)$.
f) Su pendiente es 0 y contiene al punto $(-5;-2)$.

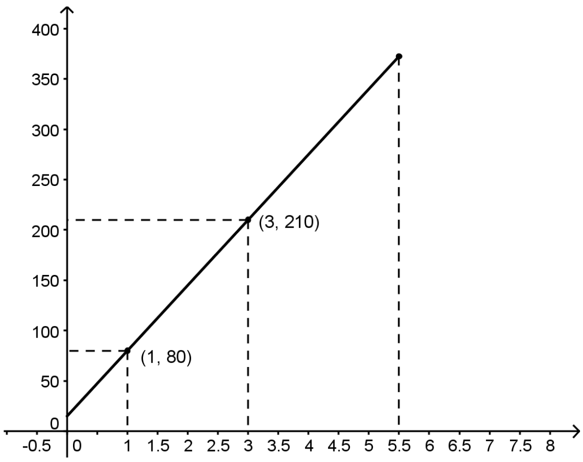
Modelos lineales

Problema 7 Un auto sale de una ciudad que está sobre la Ruta Nacional 2, entre Buenos Aires y Mar del Plata. En la siguiente tabla se informa sobre la distancia a la que se encuentra de Buenos Aires en distintos momentos de su viaje. Se supone que el auto viaja siempre a la misma velocidad.

Viajó	Está a
30 minutos	95 km
60 minutos	140 km
120 minutos	230 km

a) ¿Es cierto que a las tres horas de salir está a 320 km de Buenos Aires?
b) ¿A qué distancia de Buenos Aires estará a las tres horas y media de haber salido?
c) ¿A qué distancia de Buenos Aires se encuentra la ciudad de donde partió?
d) Realizá un gráfico que represente la distancia del auto a Buenos Aires a medida que transcurre el tiempo de viaje. Justificar.
e) ¿A qué velocidad viaja el auto?
f) Proponé una fórmula que permita calcular la distancia del auto a Buenos Aires en función del tiempo transcurrido.
g) Otro auto parte desde otra ciudad que está en la ruta entre Buenos Aires y Mar del Plata, ubicada a 10 km de Buenos Aires. Este auto también viaja siempre a la misma velocidad: 120 km/h. ¿Se van a cruzar estos dos vehículos? En caso afirmativo, ¿en dónde y en qué momento?
h) Si este último auto hubiese partido a una velocidad de 95 km/h, ¿se habría cruzado con el primero? En caso afirmativo, ¿en dónde y en qué momento?
i) Realizá, en un mismo sistema de ejes, tres gráficos de manera que cada uno represente la distancia de cada uno de los autos a Buenos Aires en función del tiempo.

Problema 8 El siguiente gráfico representa la distancia de un auto a Buenos Aires en función del tiempo.



a) Definí una función (armá una fórmula que establezca una relación entre x e y y expresá un dominio) de manera tal que el gráfico anterior represente dicha función.

b) Armá una tabla de valores que representen distintos momentos del viaje y marcalos en el gráfico:

   (i) El momento en que parte.
   (ii) Cuando pasaron 2 horas y media de viaje.
   (iii) Cuando se encuentra a 300 km de Buenos Aires.
   (iv) Cuando pasaron 4 horas de viaje.
   (v) Cuando se encuentra a 230 km de Buenos Aires.
   (vi) El momento en que finaliza el viaje. ¿Llega a Mar del Plata?

Problema 9 Una pileta de natación que tiene una capacidad de 20000 litros se llena con una bomba que opera a un ritmo de 600 litros por minuto. La bomba se enciende cuando la pileta ya tiene 2000 litros de agua.

a) ¿Cuántos litros de agua habrá en la pileta a los 3 minutos de encender la bomba? ¿Y a los 7 minutos?

b) ¿Es cierto que a los 10 minutos habrá 6000 litros de agua en la pileta?

c) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la cantidad de litros de agua que habrá en la pileta x minutos después de haberse encendido la bomba?

d) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la pileta?

e) Realizá un gráfico que represente la cantidad de agua que habrá en la pileta en función del tiempo.

Problema 10 Otra pileta de natación que tiene una capacidad de 10000 litros se llena, también, con una bomba. La siguiente tabla muestra la cantidad de litros de agua que había en la pileta, para algunos momentos luego de haberse prendido la bomba.

minutos	litros
2	2000
5	2750

a) ¿A qué ritmo opera la bomba?

b) ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta al momento de encender la bomba?

c) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la cantidad de litros de agua que habrá en la pileta x minutos después de haberse encendido la bomba?
d) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la pileta?
e) Realizá un gráfico que represente la cantidad de agua que habrá en la pileta en función del tiempo.

Problema 11 Una sustancia se encuentra a 25°C, pero a partir de un momento determinado su temperatura comienza a descender de manera uniforme a razón de 2°C por minuto.

a) ¿Qué temperatura alcanzó la sustancia 15 minutos después del comienzo del proceso?
b) ¿En cuánto tiempo la sustancia alcanzó los 0°C?
c) Armá una fórmula que represente la variación de la temperatura T de la sustancia, medida en grados centígrados, en función del tiempo M en minutos, desde el inicio del proceso.
d) Realizá un gráfico, en un sistema de ejes cartesianos, que represente el proceso.

Problema 12 En un experimento se hizo variar la temperatura de una sustancia de manera uniforme. Durante el proceso se obtuvieron dos mediciones: a los 3 minutos de haber comenzado la temperatura era de 5°C, mientras que a los 8 minutos de haber comenzado era de 2°C.

a) ¿La variación de la temperatura fue ascendente o descendente? ¿De cuántos grados por minuto?
b) ¿Cuál era la temperatura de la sustancia al momento de comenzar el experimento?
c) Si el experimento duró 12 minutos, ¿cuál fue la temperatura de la sustancia una vez finalizado?
d) Armá una fórmula que represente la variación de la temperatura T de la sustancia, medida en grados centígrados, en función del tiempo M en minutos, desde el inicio del proceso.
e) Realizá un gráfico, en un sistema de ejes cartesianos, que represente el proceso.

Problema 13 Se tiene un barril de aceite, del cual se sabe que vacío pesa 30 kg. Si un litro de aceite de cocina pesa $0,74$ kg:

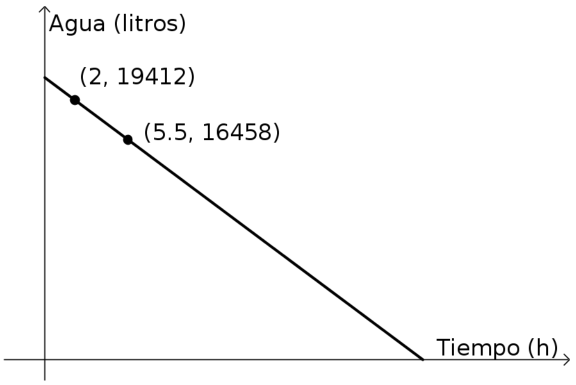
a) ¿Cuánto pesará el barril si contiene $7,5$ litros de aceite? ¿Y si contiene $22,3$ litros?
b) ¿Cuánto variaría el peso del barril si se agregaran 10 litros de aceite? ¿Y si se agregaran $7,8$ litros?
c) Escribí la fórmula de una función que calcule el peso del barril en función de la cantidad de litros de aceite que hay en el mismo.
d) Sabiendo que el barril lleno pesa $94,565$ kg, calculá su capacidad máxima en litros.
e) Realizá el gráfico de la función.

Problema 14 Se tiene otro barril de aceite del cual se sabe la siguiente información:

- Cuando contiene 14 litros de aceite su peso es de $36,48$ kg.
- Cuando contiene $17,5$ litros de aceite, su peso es de $39,35$ kg.

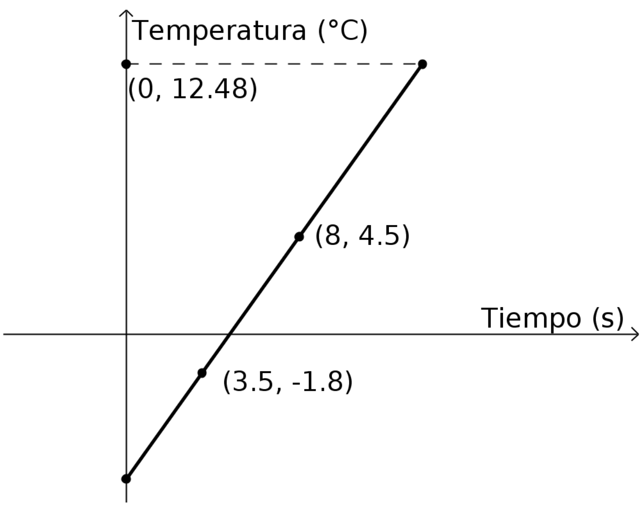
a) ¿Cuánto pesa cada litro de aceite?
b) ¿Cuánto pesa el barril vacío?
c) Hallá la fórmula de una función que calcule el peso del barril en función de la cantidad de litros de aceite que hay en el mismo.
d) Sabiendo que el barril lleno pesa $102{,}49$ kg, calculá su capacidad máxima en litros.
e) Realizá el gráfico de la función.

Problema 15 El siguiente gráfico representa el proceso de vaciado de un tanque de agua a partir del momento en que se empezó a desagotar.



a) Marcá el punto que representa el momento en que la pileta comenzó a vaciarse. ¿Qué cantidad de agua tenía el tanque en ese momento?
b) ¿Cuántos litros por minuto salieron del tanque mientras se vaciaba?
c) Escribí una fórmula que calcule la cantidad de agua que había en el tanque a los x minutos de haber comenzado a vaciarse.
d) Marcá sobre el gráfico el punto que representa el momento en que el tanque se vació y calculá cuánto tardó en hacerlo.

Problema 16 El siguiente gráfico representa la temperatura de una sustancia en función del tiempo mientras se realiza un experimento.



a) ¿Es verdad que la temperatura varió de manera uniforme? ¿Por qué?

b) Escribí la fórmula de la función que está representada por el gráfico.
c) ¿Cuánto tiempo duró el experimento?

Problema 17 Roberto está por hacer un viaje y está averiguando para alquilar un auto. Averiguó en dos compañías:

- La compañía A le cobra $\$800$ fijos y $\$1,10$ por kilómetro recorrido.
- La compañía B le cobra $\$150$ fijos y $\$1,35$ por cada kilómetro recorrido.

a) Si estima que va a recorrer 1000 Km, ¿qué compañía le conviene contratar? ¿Y si recorriera 5000 Km?
b) Armá una fórmula correspondiente a la compañía A y otra correspondiente a la compañía B, que represente el costo del alquiler en función de los kilómetros recorridos. ¿A partir de qué kilometraje le conviene cada compañía?
c) Si finalmente Roberto eligió la compañía A y cuando terminó el viaje el costo del alquiler fue de $\$3355,30$, ¿cuántos kilómetros recorrió?

Problema 18 Dos tanques de agua se vaciaron mediante canillas a un ritmo constante. El tanque A tenía inicialmente 500 litros y el caudal de líquido que se extrajo fue de 30 litros por cada minuto. Del tanque B se sabe que a los 4 minutos y 30 segundos de haber empezado a vaciarse tenía 1500 litros, y que a los 6 minutos de haber comenzado a vaciarse tenía 1300 litros.

a) ¿Cuántos litros tenía el tanque B cuando comenzó a vaciarse?
b) ¿Cuál fue el caudal de líquido que se le extrajo al tanque B por cada minuto transcurrido?
c) Si los dos tanques comenzaron a vaciarse en el mismo momento, ¿cuál se vació primero?

Problema 19 Dos automóviles comienzan a viajar por la misma ruta al mismo tiempo. Del auto A se sabe que a la hora de haber partido se encontraba en el km 157 y que a las 3 horas de haber partido se encontraba en el km 343. Del auto B se sabe que a las 2 horas y media de haber partido se encontraba en el km 425 y que a las 4 horas de haber partido se encontraba en el km 329.

a) ¿Es verdad que viajan en direcciones opuestas?
b) ¿En qué momento y en qué km se encuentran?
c) ¿A qué velocidad viaja cada uno?
d) ¿En qué km está la ciudad de donde parte cada uno?

Problema 20 Dos automóviles comienzan a viajar por la misma ruta al mismo tiempo. Del auto A se sabe que a la hora de haber partido se encontraba en el km 297 y que a la hora y media de haber partido se encontraba en el km 345. Del auto B se sabe que a la media de haber partido se encontraba en el km 358 y que a las 2 horas de haber partido se encontraba en el km 466.

a) ¿Es verdad que viajan en direcciones opuestas?
b) ¿En qué momento y en qué km se encuentran?
c) ¿A qué velocidad viaja cada uno?

d) ¿En qué km está la ciudad de donde parte cada uno?

Problema 21 Dos automóviles comienzan a viajar por la misma ruta al mismo tiempo. Del auto A se sabe que a las 3 horas de haber partido se encontraba en el km 100 y que a la hora de haber partido se encontraba en el km 280. Del auto B se sabe que a las 4 horas y media de haber partido se encontraba en el km 680 y que a la hora de haber partido se encontraba en el km 470.

a) ¿Es verdad que viajan en direcciones opuestas?

b) ¿En qué momento y en qué km se encuentran?

c) ¿A qué velocidad viaja cada uno?

d) ¿En qué km está la ciudad de donde parte cada uno?

Áreas entre rectas

Problema 22 Calculá el área encerrada entre:

- la recta $y = 2x + 1$;
- la recta $x = 5$;
- el eje y;
- el eje x.

Problema 23 Calculá el área encerrada entre:

- la recta $y = 3x - 1$;
- la recta $y = -2x + 4$;
- la recta $x = 4$.

Problema 24 Calculá el área encerrada entre:

- la recta $y = 3x - 1$;
- la recta $y = -2x + 4$;
- la recta $y = 5$.

Problema 25 Calculá el área encerrada entre:

- la recta $y = -3x + 4$;
- la recta $y = 2x - 6$;
- la recta $y = -\frac{1}{2}x + 9$.

Unidad 4: Funciones cuadráticas

Formas de su fórmula, caracterísitcas de la parábola y situaciones modelizadas.

Estas definiciones no son del todo correctas. Las volveremos a definir de manera más rigurosa en la Unidad 6.

Definición 1 *Raíces de la función f:*

$$\text{Raíces}(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = 0\}$$

Definición 2 *Conjunto de positividad de la función f:*

$$C^{+}(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) > 0\}$$

Definición 3 *Conjunto de positividad de la función f:*

$$C^{+}(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) < 0\}$$

Existen tres formas convencionales de expresar la fórmula de una función cuadrática.

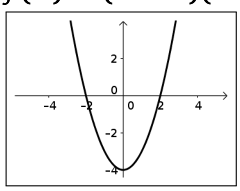
- Forma factorizada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Forma canónica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$
- Forma polinómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$

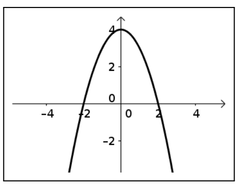
Forma factorizada

Problema 1 Determiná las raíces, el conjunto de positividad (C^{+}) y el conujunto de negatividad (C^{-}) de cada función. Luego decidí cuál de los graficos presentados puede corresponder a la función.

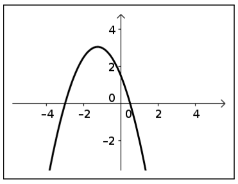
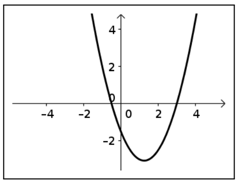
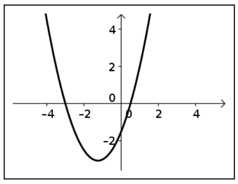
*Sugerencia: Las fórmulas de las funciones f, g y h son iguales a algunas de las expresiones del **Problema 7** y del **Problema 8** de la página 10, por lo que para la resolución de este problema pueden ser utilizadas sus resoluciones.*

a) $f(x) = (x - 2)(x + 2)$

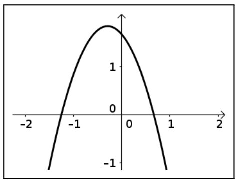
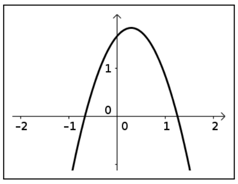
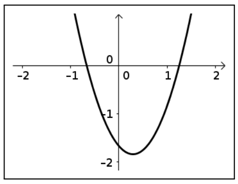




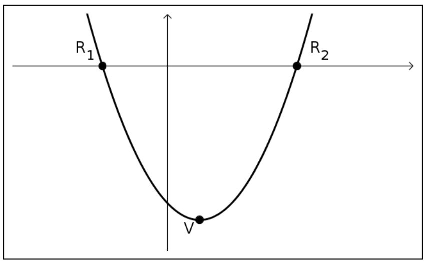
b) $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$

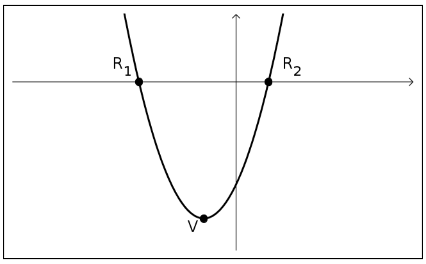
c) $h(x) = -2\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{4}\right)$

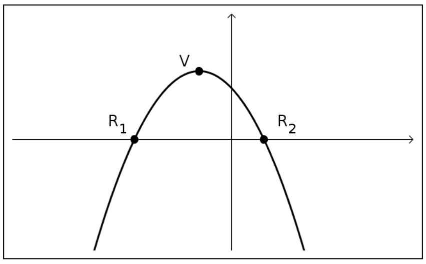
Problema 2 En cada caso se presenta una función cuadrática con su correspondiente gráfico. Hallá las coordenadas de los puntos indicados y determiná su conjunto de positividad y su conjunto de negatividad.

a) 

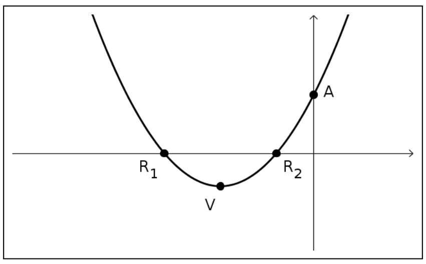
$f(x) = (x-4)(x+2)$

b) 

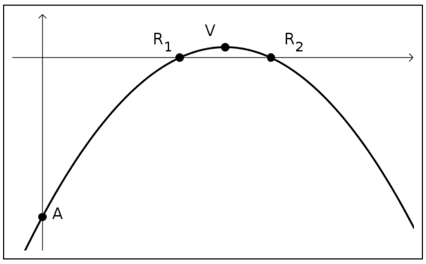
$g(x) = 2(x-1)(x+3)$

c) 

$h(x) = -1(x-1)(x+3)$

d) 

$k(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)$

e) 

$p(x) = -\frac{1}{2}(x-2{,}5)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

Problema 3 En cada caso, determiná el valor de a para que la coordenada y del vértice de la función sea la indicada. Luego realizá un gráfico aproximado de la función utilizando las raíces y el vértice, e indicando sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f(x) = a(x+1)(x-3)$ $\quad y_v = -8$
b) $g(x) = a(x+1)(x-3)$ $\quad y_v = -4$
c) $h(x) = a(x+1)(x-3)$ $\quad y_v = 1$
d) $k(x) = a(x-2)(x+1)$ $\quad y_v = -9$
e) $p(x) = a(x-2)(x+1)$ $\quad y_v = \frac{3}{4}$

Problema 4 En cada caso, escribí, si es posible, la fórmula de la función que cumple con las características descriptas.

a) Una de sus raíces es $x = -2$ y su vértice es el punto $(1; -3)$.
b) Su intervalo de crecimiento es $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$, una de sus raíces es -2 y su valor máximo es $-6{,}25$.
c) Su intervalo de positividad es $(-4; -1)$ y su coordenada $y_v = 3$.
d) Su intervalo de negatividad es $(-3; 7)$ y su coordenada $y_v = 5$.
e) Su intervalo de crecimiento es $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$, una de sus raíces es $x = 6$ y corta al eje y en el valor 3.

Forma canónica

Problema 5 Para cada una de las siguientes fórmulas (que corresponden a funciones cuadráticas):

a) hallá 5 pares de puntos simétricos;
b) hallá las coordenadas del vértice.

- $f(x) = 3(x-2)^2 - 27$
- $g(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$
- $h(x) = -\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 12$
- $k(x) = -2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - 2$
- $p(x) = -5\left(x-\frac{7}{5}\right)^2 + 5$

Problema 6 Realizá un gráfico aproximado de todas las funciones del **Problema 5** que incluya el vértice, las raíces (si existen) y dos puntos simétricos que no sean las raíces. Luego expresá su conunto de positividad, su conjunto de negatividad, su intervalo de crecimiento y su intervalo de decrecimiento.

Forma polinómica

Problema 7 Comprobá las siguientes equivalencias:

a) $2(x-1)^2-\frac{25}{2}=2x^2-4x-\frac{21}{2}$
b) $(x-1)^2-4=x^2-2x-3$
c) $-\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}x^2-3x$
d) $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$
e) $2(x+1)(x-2)=2x^2-2x-4$
f) $-x^2-2x+8=-(x-2)(x+4)$

Problema 8 Resolvé las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2-4x-\frac{21}{2}=0$
b) $0=x^2-2x-3$
c) $-\frac{1}{2}x^2-3x=0$
d) $x^2-x-6=0$
e) $0=2x^2-2x-4$
f) $-x^2-2x+8=0$

Problema 9 Realizá un gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2+x-\frac{3}{4}$
b) $f(x)=-2x^2+\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}$
c) $f(x)=3x^2+21x+36$
d) $f(x)=x^2+4x+3$
e) $f(x)=-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{9}$
f) $f(x)=2x^2+32x+120$

Problema 10 En cada caso, construí la fórmula de una función cuadrática que cumpla con lo pedido. Si no es posible, explicá por qué.

a) Esté escrita en forma polinómica y tenga a $-\frac{3}{2}$ y a -2 como raíces.
b) Esté escrita en forma canónica y tenga a 3 como raíz doble.
c) Esté escrita en forma factorizada y el punto $(-2;-3)$ sea su vértice.
d) Esté escrita en forma canónica y no tenga raíces.
e) Esté escrita en forma factorizada y no tenga raíces.
f) Esté escrita en forma polinómica y no tenga vértice.
g) Esté escrita en forma factorizada, que el coeficiente principal sea -2 y tenga eje de simetría en $x=0$.
h) Esté escrita en forma polinómica, tenga el vértice en $(-1;-1)$ y las raíces sean -2 y 3.
i) Esté escrita en forma canónica, tenga raíz doble en $x=1$ y eje de simetría en $x=-2$.
j) Esté escrita en forma canónica, tenga una raíz en -2, el vértice en $(0;4)$ y el coeficiente principal sea -1.
k) Esté escrita en forma polinómica, tenga una raíz en -2, el vértice en $(0;4)$ y el coeficiente principal sea 1.

Problema 11 Calculá de manera analítica y gráfica la intersección entre los gráficos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ y $g(x) = 3x - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$ y $g(x) = -5x - 7$
c) $f(x) = -x^2 + 4x - 8$ y $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$
d) $f(x) = -2x - 3$ y $g(x) = -2x^2 + 1$

Situaciones modelizadas

Problema 12 Una bolita de vidrio es lanzada hacia arriba desde 1 m de altura y con una velocidad de 15 m/s. Si la variable t representa el tiempo (medido en segundos), la altura (en metros) a la que estará la bolita en cada instante viene dada por la fórmula

$$f(t) = -5t^2 + 15t + 1$$

a) ¿A qué altura del piso estará la bolita 0,5 s después de ser lanzada?
b) ¿A qué altura estará 2 s después de ser lanzada?
c) ¿Se puede asegurar que la bolita estuvo ascendiendo durante los primeros dos segundos desde que fue lanzada?
d) Observen que, para esta función, es $f(0) = 1$. ¿Qué significa esta información en el contexto del problema?
e) Observen que $f(3) = 1$ y $f(4) = -19$ ¿Qué significan estos valores en el contexto del problema?
f) ¿Cuánto tarda la bolita en llegar al piso?

Problema 13 Una bolita de vidrio es lanzada hacia arriba desde 2 m de altura y se sabe que a los 4 y a los 9 segundos se encuentra a 146 m de altura. Armen la fórmula de la función cuadrática que modeliza la situación y respondan.

a) ¿A qué altura del piso estará la bolita $1,5$ s después de ser lanzada?
b) ¿A qué altura estará 13 s después de ser lanzada?
c) ¿Se puede asegurar que la bolita estuvo ascendiendo durante los primeros 7 segundos desde que fue lanzada?
d) Observen que, para esta función, es $f(0) = 2$. ¿Qué significa esta información en el contexto del problema?
e) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega la bolita?
f) ¿Cuánto tarda la bolita en llegar al piso?

Problema 14 En una isla se introdujo una cierta cantidad de abejas para estudiar su evolución. La función $f(x) = -20x^2 + 360x + 1000$ permite calcular la cantidad de abejas que hubo en la isla a los x días de haberlas introducido.

a) ¿Qué día la población de abejas fue mayor?
b) ¿Cuál es la mayor cantidad de abejas que llegó a haber en la isla?
c) ¿Cuántas abejas hubo en la isla a los 15 días?
d) ¿Se extingió en algún momento la población de abejas? ¿Cuándo?

e) ¿Qué cantidad de abejas se introdujeron en la isla? ¿Qué otro día hubo la misma cantidad?

f) ¿Qué día hubo 2440 abejas?

Problema 15 En una isla se introdujo una cierta cantidad de abejas para estudiar su evolución. Se sabe que la población tuvo la mayor cantidad de abejas a los 11 días de haber comenzado el estudio, que esa cantidad fue de 4410 abejas y que se extinguió a los 32 días. Suponiendo que la evolución de la población se comporta según un modelo cuadrático, armen la fórmula de la función que modeliza la situación y respondan.

a) ¿Cuántas abejas hubo en la isla a los 10 días?

b) ¿Qué cantidad de abejas se introdujeron en la isla? ¿Qué otro día hubo la misma cantidad?

c) ¿Qué día o qué días hubo 4250 abejas?

Problema 16 Un proyectil se lanza hacia arriba verticalmente. La fórmula

$$f(x) = -5(x-3)^2 + 80$$

calcula la altura del proyectil (medida en metros) en función del tiempo (medido en segundos). Utilizá los resultados hallados para responder:

a) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó el proyectil?

b) ¿En qué momento la alcanzó?

c) ¿En qué momento cayó al piso?

d) ¿Desde qué altura fue lanzado?

Problema 17 Un proyectil se lanza hacia arriba verticalmente desde el piso y vuelve a caer al piso a los 17 segundos. Se sabe que a los 2 segundos de haber sido lanzado su altura fue de 150 metros. Hallen la fórmula de la función cuadrática que modeliza la situación y respondan.

a) ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó el proyectil?

b) ¿En qué momento la alcanzó?

c) ¿En qué otro momento estuvo a 2 m de altura?

d) ¿En qué momentos estuvo a $236{,}25$ m?

Problema 18 Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un micro emprendimiento como técnicos de computadoras. Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula:

$$G(p) = -20p^2 + 840p - 1600$$

que permite calcular la ganancia mensual en función del precio por hora.

a) Miguel propone cobrar $\$35$ por hora. ¿Cuánto ganarían en ese caso? ¿Existe otro precio por hora para el cual obtendrían la misma ganancia? ¿Cuál?

b) ¿Es posible obtener una ganancia de $\$4800$? ¿y de $\$8200$? ¿Por qué?

c) Ernesto propone aumentar la ganancia al máximo posible. ¿A qué precio deberían cobrar la hora? ¿Cuál sería esa ganancia?

d) ¿Cuáles son los precios que podrían cobrar sin dejar de obtener ganancia?

Unidad 5: Funciones polinómicas

Formas de su fórmula, caracterísitcas de su gráfico y situaciones modelizadas.

Problema 1

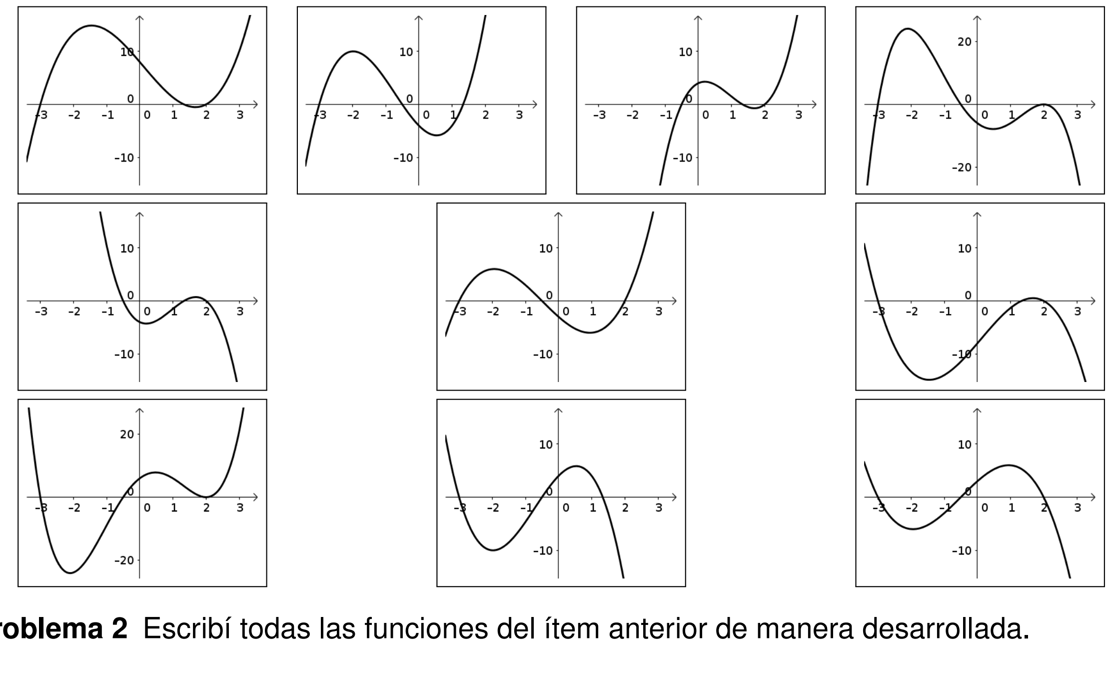
a) Para cada una de las siguientes expresiones determiná los valores de x que hacen que el resultado sea positivo, cero o negativo.

- $x-2$
- $x+3$
- $x-\frac{4}{3}$
- $x+\frac{1}{2}$

b) Teniendo en cuenta lo determinado en el ítem anterior, hallá el C^0, C^+ y C^- de cada una de las funciones.

- $f(x)=(x-2)(x+3)\left(x-\frac{4}{3}\right)$
- $g(x)=2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$
- $h(x)=-3\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)$
- $k(x)=-(x-2)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$
- $l(x)=(x+3)(x-2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$

c) Indicá cuáles de los gráficos pueden corresponderse con cada una de las funciones.



Problema 2 Escribí todas las funciones del ítem anterior de manera desarrollada.

Problema 3 Calculá las raíces de las siguientes funciones polinómica y escribilas de forma factorizada.

- $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 26x + 20$
- $g(x) = -3x^3 - 6x^2 + 15x + 18$
- $h(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$
- $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 18$
- $l(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{19}{40}x^2 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{40}$

Problema 4 En cada caso, escribí una función polinómica que cumpla con las características descriptas.

a) $C^0 = \left\{-3; 2; \frac{5}{2}\right\}$ y su gráfico pasa por el punto $(0; 3)$.

b) $C^+ = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ y su gráfico pasa por el punto $(1; 4)$.

c) $C^- = (-4; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 3\right)$ y su gráfico pasa por el punto $(-3; -22)$.

d) $C^0 = \left\{-3; -\frac{1}{2}; 1\right\}$ y $C^- = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Problema 5 Escribí en forma factorizada, si es posible, las fórmulas de las siguientes funciones polinómicas.

- $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$
- $g(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 4$
- $h(x) = -2x^4 + 11x^3 - 18x^2 + 11x - 6$
- $k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$
- $l(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 3$

Problema 6 Hallá el C^0, C^+, C^-, $I^\uparrow$ y el $I^\downarrow$ de cada una de las siguientes funciones de manera exacta.

- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 27$
- $g(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 11$
- $h(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$
- $k(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 4x + \frac{14}{3}$

Unidad 6: Funciones sin fórmula

Dominio e imagen, ecuaciones, gráficos posibles e imposibles.

En esta unidad se usarán las definiciones de la página 47.

Problema 1 La siguiente tabla muestra los datos de la población mundial (en miles de millones de personas) en los años indicados:

Año	1750	1800	1850	1900	1950	1980	1990	2000	2010
Población	0,8	0,98	1,26	1,65	2,5	4,4	5,2	6	6,85

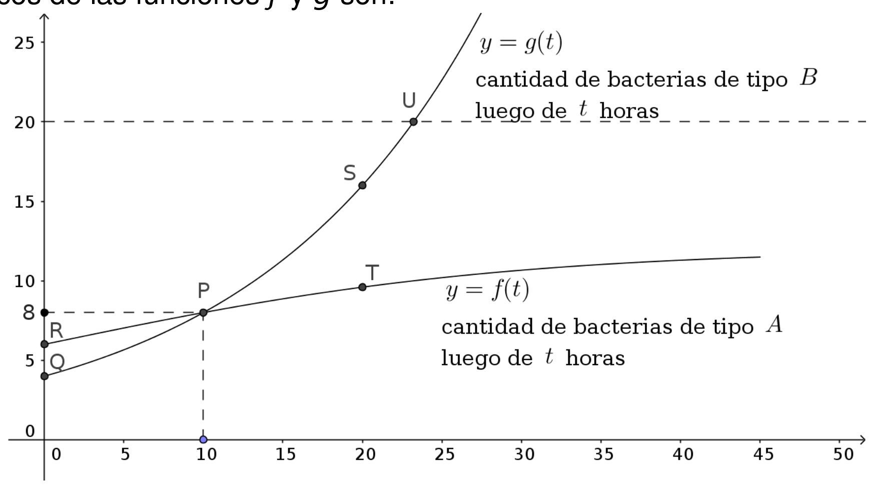
Considerá a la población mundial P como función del año a, de manera que

$$P : A \to \mathbb{R}$$

con $A = \{1750; 1800; 1850; 1900; 1950; 1980; 1990; 2000; 2010\}$.

a) Hallá $\operatorname{Im}(P)$.
b) Resolvé las ecuaciones $P(a) = 2{,}5$ y $P(a) = 2$. ¿Cómo se pueden interpretar las soluciones obtenidas en el contexto del problema?
c) Resolvé la inecuación $P(a) \geq 1$. ¿Cómo se pueden interpretar las soluciones obtenidas en el contexto del problema?

Problema 2 En un laboratorio se realiza un experimento para medir el crecimiento de dos tipos de bacterias: tipo A y tipo B. Se definen las funciones: $f(t)$ como la cantidad de bacterias del tipo A que hay luego de t horas de comenzado el experimento y $g(t)$ la cantidad de bacterias del tipo B que hay luego de t horas de comenzado el experimento. Si los gráficos de las funciones f y g son:



donde: $Q = (0;4)$, $R = (0;6)$, $S = (20;16)$, $T = (20;9{,}6)$, $U = (23{,}22;20)$.

a) ¿De qué tipo de bacterias había una población mayor al comenzar el experimento? ¿Y luego de 20 horas?

b) ¿A partir de qué momento la población de bacterias de tipo B es mayor que la población de bacterias de tipo A?¿En algún momento ambas poblaciones tienen la misma cantidad de organismos?

c) Resolvé:

(i) $f(t) = g(t)$ (ii) $f(t) \leq g(t)$ (iii) $f(t) > g(t)$

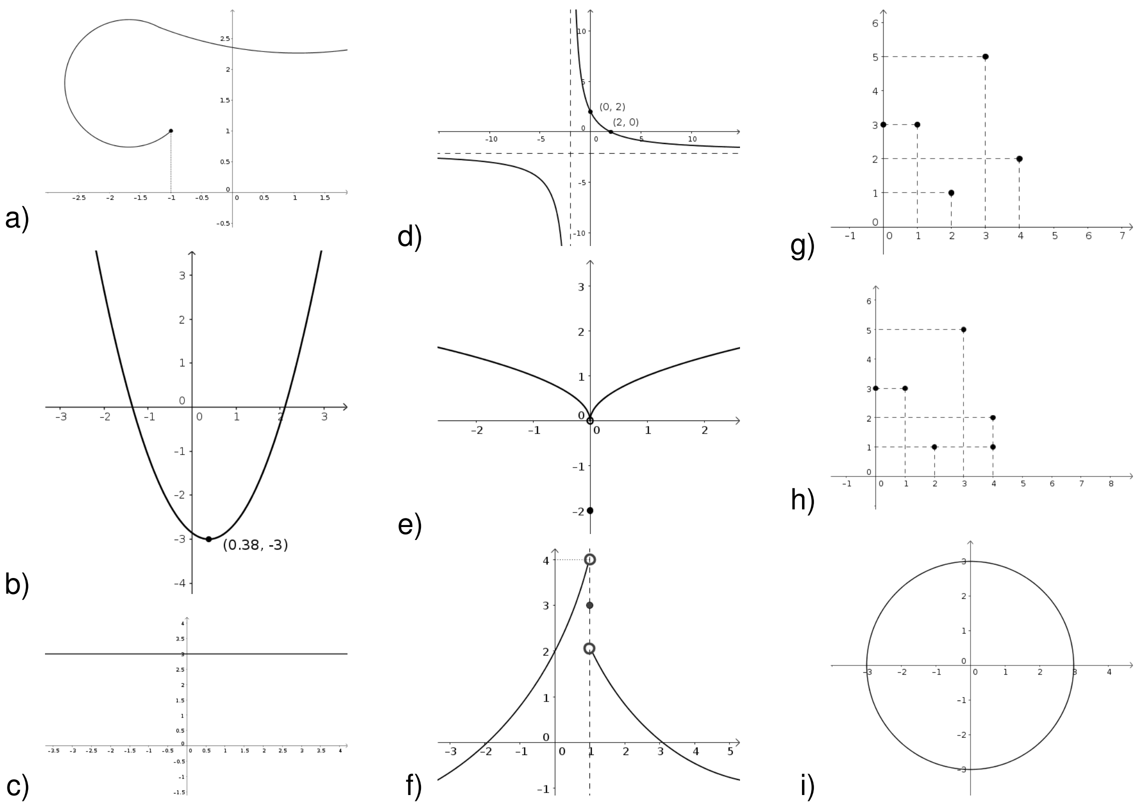
¿Cómo se pueden interpretar los planteos y las soluciones obtenidas en el contexto del problema?

d) A partir de la información que se tiene hallá, si es posible, todos los t que verifican:

(i) $f(t) = 20$ (ii) $g(t) = 20$

¿Cómo se pueden interpretar las soluciones obtenidas en el contexto del problema? Si no existen soluciones, realizá alguna suposición sobre el comportamiento de la función en cuestión que permita resolver la ecuación.

Problema 3 Dados los siguientes gráficos:



a) Decidí cuáles representan el gráfico de una función y cuáles no.

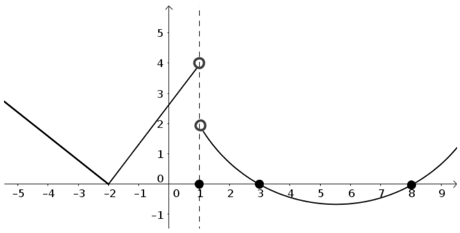
b) Para los que sean gráficos de una función, hallá su dominio natural y su conjunto imagen.

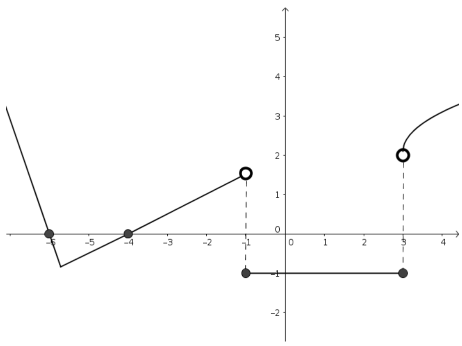
c) Resolvé las siguientes ecuaciones e inecuaciones donde f es la función cuyo gráfico es el d):

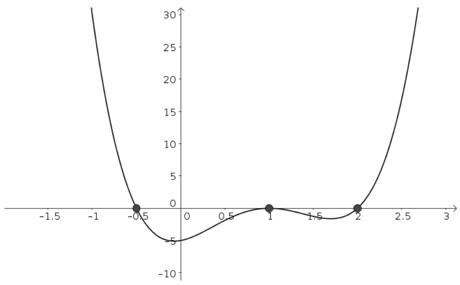
(i) $f(x) = -2$ (ii) $f(x) = 0$ (iii) $f(x) \leq 2$

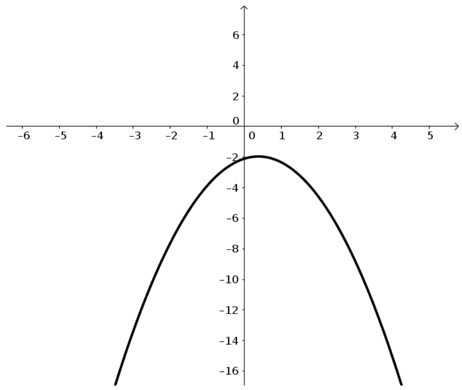
d) Si g es la función cuyo gráfico es el b):
- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $g(x) = 0$?
- ¿Y la ecuación $g(x) = -5$?
- ¿Es posible hallar una constante k de modo que la ecuación $g(x) = k$ tenga una única solución?

Problema 4 Hallá C^0, C^+ y C^- de cada una de las funciones determinadas por los gráficos, teniendo en cuenta que su dominio es $\mathbb{R}$.

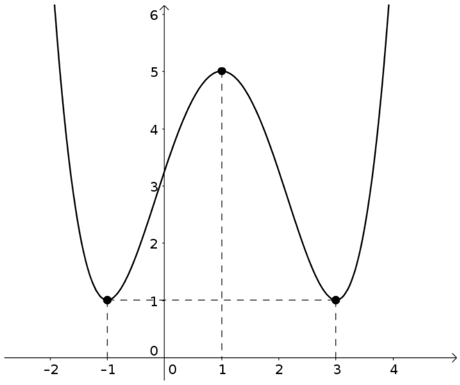

a)

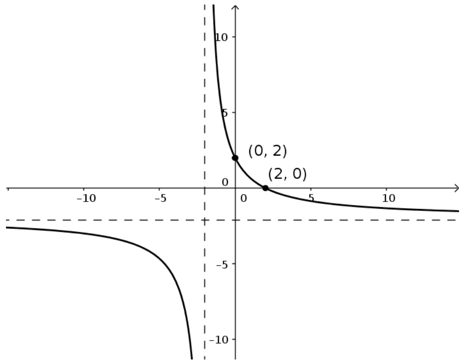

c)


b)


d)

Problema 5 Dadas las funciones cuyos gráficos son:


a)

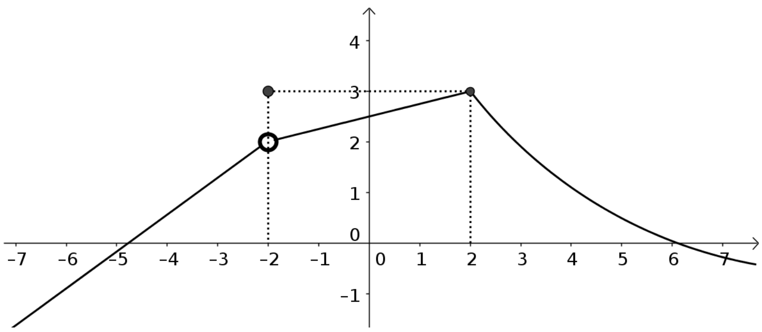


b)

a) Determiná para cada una de ellas sus intervalos de monotonía (crecimiento o decrecimiento) y sus extremos relativos (máximo y mínimo relativos) en caso de que posean. Indicá cuáles de los extremos hallados son absolutos.

b) Sea f la función cuyo gráfico es el a), analizá la validez de los siguientes razonamientos:
- Como f tiene un mínimo absoluto en $x = -1$ y en $x = 3$ que vale $f(-1) = f(3) = 1$, entonces $f(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Como la función f tiene un mínimo absoluto en $x = -1$ y $x = 3$ que vale $f(-1) = f(3) = 1$, entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 6 Dado el siguiente gráfico de una función:

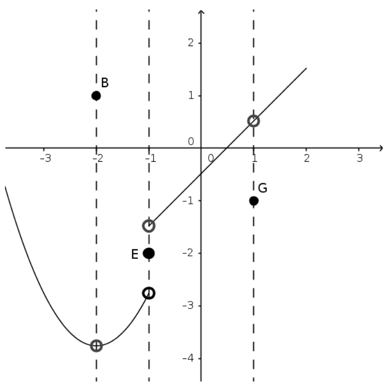


Explicá por qué cada una de las siguientes afirmaciones **es falsa.**

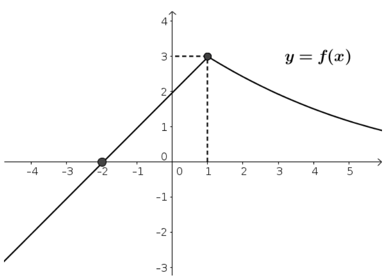
a) f es estrictamente creciente en $(-\infty; 2)$.

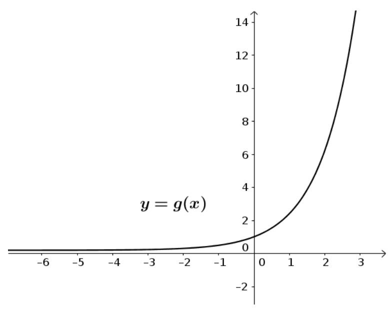
b) f no posee un máximo absoluto en $x = -2$.

Problema 7 Dado el siguiente gráfico de una función, decidí si los puntos B, G y E son extremos locales.



Problema 8 Dados los siguientes gráficos de las funciones f y g:

a) 

b) 

a) Decidí si las funciones restringidas a los conjuntos indicados son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

- $f|_{Dom(f)} : Dom(f) \to \mathbb{R}$
- $g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $f|_{[-4,1]} : [-4,1] \to \mathbb{R}$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $f|_{[-4,1]} : [-4,1] \to [-2,3]$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$

b) Elegí, si es posible, conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ según corresponda para los cuales se cumpla que:

- $f|_A : A \to B$ sea no inyectiva y sobreyectiva.
- $f|_{[0,1]} : [0,1] \to B$ sea biyectiva.
- $g|_A : A \to B$ no sea inyectiva.
- $g|_A : A \to B$ sea biyectiva.

En caso de no ser posible explicá por qué.

Problema 9 Para cada caso trazá, si es posible, el gráfico de una función que cumpla simultáneamente con las condiciones dadas.

a)
- $2 \notin Dom(f)$
- $Im(f) = (-\infty; 2]$
- $f(x) = 2$ tiene dos soluciones.

b)
- $Dom(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$
- f es estrictamente creciente en $[0; +\infty)$
- $f(0) = 1$
- La ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución positiva.

c)
- $Dom(g) = \mathbb{R} - \{2\}$
- La ecuación $g(x) = 1$ tiene dos soluciones.
- $C^-(g) = \mathbb{R} - \{2; 3\}$

d)
- $Dom(h) = \mathbb{R} - \{2\}$
- Los intervalos de crecimiento son $(-\infty; -2)$ y $(-\frac{1}{2}; 1)$.
- $C^0(h) = \{-1; 0; 4\}$
- $C^+(h) = (-\infty; -1) \cup (0; 2) \cup (2; 4)$
- $Im(h) = \mathbb{R}$

Problema 10 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\leq 3}$ es una función biyectiva:

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 4$?

b) ¿Y la ecuación $f(x) = 2$?

La totalidad de los problemas de esta unidad fueron extraídos de la “Práctica 2” de la materia *Introducción a la Matemática* dictada en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), redactada por la Prof. María Paula Trillini y el Prof. Rodolfo Murúa.

Parte III

Funciones II

Unidad 7: Funciones exponenciales y logarítmicas

Variaciones porcentuales, asíntotas y funciones inversas

Variaciones porcentuales

Problema 1 El precio de un automóvil usado disminuye con el tiempo, de manera que cada año cuesta el 15 % menos de lo que costaba el año anterior. Consideren que un auto determinado cuesta hoy $50000.

a) ¿Cuánto costará dentro de un año? ¿Cuánto costará dentro de dos años?
b) ¿Cuánto estiman que costará dentro de 100 años? ¿Y dentro de 250 años?
c) Escribí una fórmula que permita calcular el precio del auto en función del tiempo. Determiná el dominio y graficá la función.
d) Un comprador tiene ahorrados $17000. ¿Cuánto tiempo debería esperar, como mínimo, para poder comprar ese auto?
e) ¿Cuál es el porcentaje que se deprecia el valor del auto cada 10 años? Escribí una fórmula que permita calcular el precio del auto en función del tiempo medido en décadas.

Problema 2 Siempre que se compra un auto se paga un monto fijo por su transferencia. Suponiendo que ese monto fijo es de $1200, vuelvan a resolver todos los ítems del problema anterior teniendo en cuenta el costo de compra del automóvil (que incluye el gasto de transferencia) en lugar de su valor.

Problema 3 A principio de año el precio de un litro de gaseosa es de $15. Se estima que la variación porcentual de su precio será del 2 % mensual.

a) ¿Cuál será su precio al cabo de un mes? ¿Y al cabo de tres meses? ¿Y al cabo de siete?
b) Ricardo y Rubén necesitan saber cuál será el precio de la gaseosa en octubre. Ricardo calculó que será `$18,28` y Ruben `$18`. ¿Qué cálculo hizo cada uno? ¿Cuál de los dos precios es el correcto?
c) ¿Es verdad que la inflación anual de este producto fue del 24 %? ¿Por qué?
d) Armá una fórmula que permita calcular el precio de la gaseosa para cada mes del año.

e) Ingresen la fórmula en GeoGebra y verifiquen que la curva pasa por los puntos:

$$(\underbrace{nro.\ de\ mes}_{x};\underbrace{precio\ de\ la\ gaseosa}_{y})$$

Problema 4 Se estima que la inflación total entre el inicio del año 2004 y el final del año 2015 fue de un 700 %.

a) Si a principios del año 2004 un producto A costaba $\$10$, ¿cuánto costaba a finales de 2015?
b) Escribí la fórmula de una función que calcule el precio del producto A en función del tiempo medido en años desde el inicio de 2014, suponiendo que la inflación fue la misma todos los años.
c) ¿Cuál fue la inflación media durante esos doce años?

Problema 5 Se administraron 70 miligramos de cierto medicamento a un paciente. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a la tercera parte cada 5 horas.

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa la cantidad del medicamento restante en el torrente sanguíneo del paciente en relación con el tiempo transcurrido medido en horas?
b) ¿Cuántos miligramos del medicamento quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?
c) ¿Después de cuánto tiempo quedará solo 1 miligramo del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente?

Problema 6 Una sustancia radiactiva pierde el $3\,\%$ de su masa cada 2 años. Al momento de comenzada la observación la sustancia pesa 7 kg.

a) Hallá la función que determina la cantidad de masa en función del tiempo (en años).
b) Calculá cuál es el porcentaje de masa que pierde por año y cuál el que pierde por década.
c) ¿Después de cuánto tiempo su masa se reduce a la mitad?

Problema 7 Lean el siguiente texto:

Decaimiento radiactivo

Durante toda su vida las plantas y animales incorporan a su organismo, a través del aire que respiran y de los alimentos que ingieren, distintos elementos presentes en la atmósfera. Entre ellos está el carbono. Toda concentración de carbono de la atmósfera tiene una parte estable (carbono 12 o C12) y una parte radiactiva (carbono 14 o C14).

¿Qué es un átomo radiactivo?

Un átomo radiactivo es un átomo cuyo núcleo puede transformarse espontáneamente, dando lugar a otro átomo más estable. El C14, por ejemplo, es un isótopo radiactivo del C12.

Vida media.

Cualquier concentración de C14 va decayendo (transformándose) hasta convertirse en nitrógeno. Esta desintegración lleva un tiempo y se produce de manera que el tiempo que le lleva a una concentración de material radiactivo reducirse a la mitad es siempre el mismo (uno distinto para cada material). Por ejemplo, 32 g de un material radiactivo tardará un tiempo en desintegrarse, hasta que solo queden 16 g. Luego tardará el mismo tiempo en desintegrarse hasta que queden 8 g y el mismo tiempo en desintegrarse hasta que queden 4 g, etc. Este tiempo se llama vida media del material radiactivo.

La cantidad de C14 presente en un organismo va decayendo, pero también es renovada continuamente mientras el organismo vive, de manera que su proporción de C14 es constante. Cuando el organismo muere, ya no renueva su proporción de C14. Mientras la cantidad de C12, permanece estable en él, el C14 continúa decayendo en función del tiempo. Los científicos han podido comprobar que la vida media del C14 es 5730 años, es decir, que la concentración de C14 se reduce a la mitad cada 5730 años.

a) Suponé que la concentración constante de C14 en el carbono presente en un organismo es cierto número K. Escribí la fórmula que permite calcular la concentración de C14 en dicho organismo, en función del tiempo (medido en años), a partir del momento en que el organismo muere.

b) Representá la constante K con un deslizador y graficá la función.

c) Los investigadores que estudiaron las pinturas rupestres de las cuevas de Altamira pudieron medir la proporción de C14 (tal vez en las sustancias orgánicas de la pintura o en otros restos orgánicos hallados en las cuevas) y determinaron que solo quedaba el 20% de la concentración inicial K. ¿Cómo pueden utilizar esta información para determinar la antigüedad de las pinturas?

Comportamiento asintótico

Problema 8 En un experimento se calentó un líquido hasta alcanzar una temperatura de 95 °C. Inmediatamente después se lo dejó enfriar al aire libre. Al cabo de dos minutos su temperatura era de $87{,}5$ °C. Supongamos que su temperatura disminuye de forma exponencial y que tiende a una temperatura ambiente de 20 °C.

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del líquido en cada instante t (medido en minutos).

b) ¿Cuál era la temperatura del líquido luego de transcurridos 6 minutos desde que comenzó a enfriarse?

c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por debajo de los 25 °C?

d) ¿Cuál era el porcentaje en que disminuía la temperatura por cada minuto transcurrido?

Problema 9 En un experimento se calentó un líquido hasta alcanzar una temperatura de 85 °C. Inmediatamente después se lo dejó enfriar al aire libre. Al cabo de dos minutos su temperatura era de $74{,}5$ °C. Supongamos que su temperatura disminuye de forma exponencial y que tiende a una temperatura ambiente de 15 °C.

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del líquido en cada instante t (medido en minutos).

b) ¿Cuál era la temperatura del líquido luego de transcurridos 4 minutos desde que comenzó a enfriarse?

c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por debajo de los 20 °C?

d) ¿Cuál era el porcentaje en que disminuía la temperatura por cada minuto transcurrido?

Problema 10 Se sacó una botella con agua de una heladera que estaba a 5 °C. Luego de 7 minutos su temperatura era de 8 °C. Suponiendo que su temperatura aumenta de forma exponencial y que tiende a una temperatura ambiente de 25 °C.

a) Escribí una fórmula que calcule la temperatura del agua en cada instante t (medido en minutos).

b) ¿Cuál era la temperatura del agua luego de transcurridos 4 minutos desde que se sacó de la heladera?

c) ¿A partir de qué momento su temperatura se va a encontrar por encima de los 15 °C?

Para seguir estudiando

Problema 11 Para cada uno de los conjuntos de condiciones dadas, definir una función exponencial que los cumpla.

a) $f(0) = 2, f(4) = 3{,}5$ y tiene una asíntota en $y = -1$.

b) $f(0) = 17, f(5) = 23$ y tiene una asíntota en $y = 29$.

c) $f(2) = 6, f(4) = 4$ y tiene una asíntota en $y = 7$.

d) $f(1) = 16, f(3) = \frac{32}{3}$ y tiene una asíntota en $y = 10$.

Problema 12 A principio de año el precio de un producto era de $\$35$ y durante los primeros doce meses sufrió un incremento acumulativo del $3\,\%$ mensual.

a) Escribí una fórmula que calcule el precio del producto para cada tiempo t (medido en meses) a partir del comienzo del año.

b) ¿Cuál fue el precio del producto cuando transcurrieron seis meses desde el comienzo del año?

c) ¿De cuánto fue el porcentaje total anual correspondiente al incremento del precio?

d) Suponiendo que el incremento del precio sigue siendo de un $3\,\%$ mensual acumulativo, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el producto duplique su precio original?

Problema 13 El modelo que describe el crecimiento de una población de bacterias es:

$$C : [0; 11) \to \mathbb{R},\ C(t) = 6 \cdot 1{,}5^t + 2$$

donde t es el tiempo medido en horas y $C(t)$ es la cantidad de bacterias (medidas en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial de bacterias?
b) ¿Cuál es la proporción por hora a la que crece la población? ¿Y la proporción diaria?
c) ¿En qué instante la población llega a ser 10 veces la población inicial?
d) Realizar un gráfico aproximado de la función para tiempos mayores a 11 sabiendo que luego de ese momento la población crece cada vez más lentamente.

Problema 14 El modelo que describe el crecimiento de una cantidad de dinero invertido en un banco es:

$$C : [0; 12) \to \mathbb{R},\ C(t) = 5000 \cdot 1{,}1^t$$

donde t es el tiempo medido en meses y $C(t)$ es la cantidad de dinero en pesos.

a) ¿Cuál es el monto inicial de la inversión?
b) ¿Cuál es el interés mensual que paga el banco? ¿Y el interés anual?
c) ¿En qué momento se triplica la inversión inicial?

Función inversa

Problema 15 Para todas las situaciones de los problemas anteriores:

- definir las funciones utilizadas para modelizar;

$$f : A \to B \text{ tal que } f(x) = \ldots$$

- realizar un gráfico aproximado de cada una de ellas;
- redefinir esas funciones para que sean biyectivas;
- definir sus funciones inversas indicando dominio, codominio y fórmula;
- realizar un gráfico aproximado de cada una de las funciones inversas;
- describir qué permite calcular cada una de esas funciones utilizando un ejemplo.

Unidad 8: Funciones trigonométricas

Ángulos, circunferencias, triángulos y comportamientos periódicos

Ángulos y circunferencia unitaria

Problema 1 En el plano cartesiano, considerá la circunferencia con centro en el origen de coordenadas (el punto $(0;0)$) y radio de una unidad.

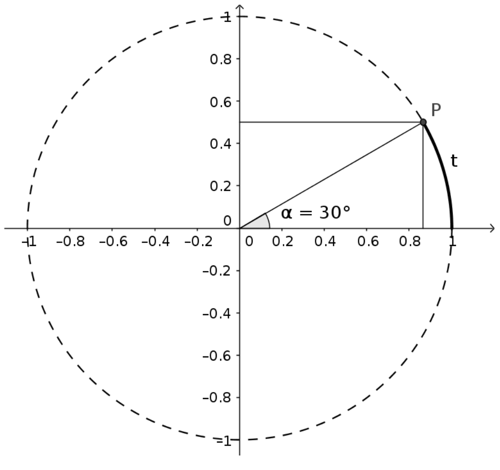
a) ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

b) Para cada uno de los siguientes ángulos, calculá la medida del arco comprendido por ellos.

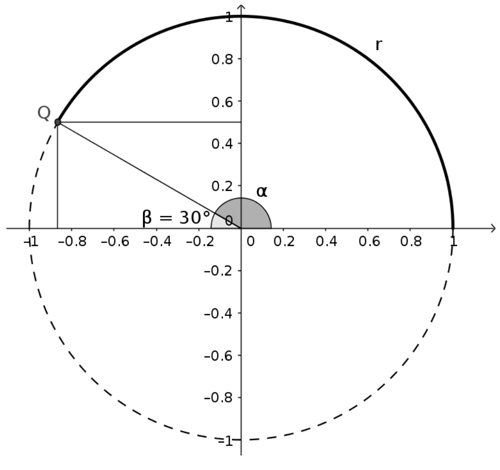
- $90°$
- $45°$
- $30°$
- $60°$
- $180°$
- $270°$
- $360°$
- $0°$

Problema 2

a) Sabiendo que $\alpha = 30°$, calculá la longitud de del arco t y las coordenadas de del punto P de manera exacta.



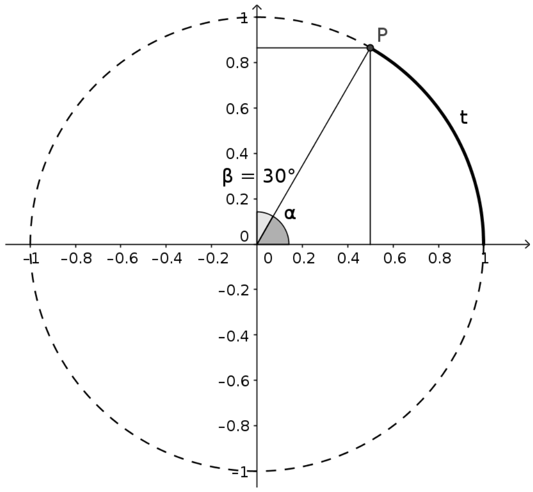
b) Deducí las coordenadas del punto Q en base a las de P y calculá la longitud del arco r y el valor del ángulo α.



Problema 3 De manera análoga al **Problema 2**, definí la medida de un ángulo expresada en grados y en radianes para que el punto que determine sobre la circunferencia cumpla con lo pedido.

a) Su coordenada x sea la misma que la del punto P y su coordenada y sea la opuesta que la del punto P.
b) Su coordenada x sea la misma que la del punto Q y su coordenada y sea la opuesta que la del punto Q.
c) Ambas coordenadas sean opuestas a las del punto P.

Problema 4 Teniendo en cuenta el siguiente gráfico y definiendo a t como la longitud del arco:



a) Calculá el valor de t, $\cos(t)$, $\operatorname{sen}(t)$ y $\tan(t)$.
b) Hallá las medidas de los ángulos (expresadas en radianes) para los cuales los puntos que determinan sobre la circunferencia tienen las mismas coordenadas que el punto P o sus opuestas.
Es decir, hallá los valores de x para los cuales se cumple simultáneamente que:
   - $|\cos(x)| = \cos(t)$
   - $|\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(t)$
c) Calculá $\tan(x)$ para todos los x hallados.

Problema 5 Sabiendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Calculá:
   - $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)$
b) Calculá:
   - $\operatorname{sen}\left(\frac{9}{4}\pi\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(\frac{25}{4}\pi\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(\frac{17}{4}\pi\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(-\frac{19}{4}\pi\right)$

Describí todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Es decir, escribí el conjunto solución de la ecuación:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ecuaciones, gráficos y funciones inversas

Problema 6 Resolvé las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\cos(x)=-\frac{1}{2}$
c) $\tan(x)=1$
d) $\operatorname{sen}(x)=\frac{1}{2}$
e) $\cos(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
f) $\tan(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
g) $\operatorname{sen}(x)=1$
h) $\operatorname{sen}(x)=0$
i) $\operatorname{sen}(x)=-1$
j) $\cos(x)=1$
k) $\cos(x)=0$
l) $\cos(x)=-1$

Problema 7 Resolvé las ecuaciones del **Problema 6** de manera gráfica utilizando GeoGebra.

Problema 8 En cada caso, completá la tabla y utilizala para hacer un grafico aproximado de la función. Luego usá GeoGebra para comprobar que el gráfico es correcto.

$f(x)=\cos(x+\pi)$

x	$x+\pi$	$\cos(x+\pi)$
	0	
	$\frac{\pi}{6}$	
	$\frac{\pi}{4}$	
	$\frac{\pi}{3}$	
	$\frac{\pi}{2}$	
	$\frac{2}{3}\pi$	
	$\frac{3}{4}\pi$	
	$\frac{5}{6}\pi$	
	π	

$g(x)=\operatorname{sen}(2x-\pi)$

x	$2x$	$2x-\pi$	$\operatorname{sen}(2x-\pi)$
		$-\frac{\pi}{2}$	
		$-\frac{\pi}{3}$	
		$-\frac{\pi}{4}$	
		$-\frac{\pi}{6}$	
		0	
		$\frac{\pi}{6}$	
		$\frac{\pi}{4}$	
		$\frac{\pi}{3}$	
		$\frac{\pi}{2}$	

Problema 9 Para las funciones f y g del **Problema 8** hallá su C^0, C^+ y C^-; sus extremos, $I^\uparrow$ y $I^\downarrow$.

Problema 10 Para cada una de las siguientes funciones hallá su C^0, C^+ y C^-; sus extremos, $I^\uparrow$ y $I^\downarrow$.

- $f(x)=\operatorname{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$
- $g(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x-\pi\right)$
- $h(x)=3\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
- $k(x)=\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)$

Problema 11 Resolvé las siguientes ecuaciones de manera análitica y de manera gráfica.

a) $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $3\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

d) $\frac{1}{2}\cos(2x + \pi) = -\frac{1}{2}$

Problema 12 Dadas las funciones,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad f(x) = \cos(x)$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad g(x) = \operatorname{sen}(x)$$

redefinir el dominio y el codominio de cada una de ellas para que resulten biyectivas.

Problema 13 Para cada una de las funciones del **Problema 8** y del **Problema 9** definí un dominio y un codominio de manera que resulten biyectivas y escribí la fórmula de su función inversa.

Parte IV

Apéndice

Definiciones

Para la Unidad 6

Dominio y codominio. Gráfico.

Definición 4 *Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$,* **una función de** A **en** B *que denotaremos $f : A \to B$ es una correspondencia que a cada elemento de A le asigna* ***uno y sólo un*** *elemento de B. Los conjuntos A y B se llaman* ***dominio*** *y* ***codominio*** *de f y se notan $Dom(f)$ y $Codom(f)$ respectivamente.*

De aquí en adelante supondremos que los conjuntos A y B son no vacíos y están contenidos en $\mathbb{R}$.

Notemos que una función puede estar representada de varias maneras, por ejemplo por una fórmula, por una tabla o por un gráfico.

Definición 5 *Dada $f : A \to B$ llamaremos* **gráfico de** f *al subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por los pares ordenados de la forma $(x; f(x))$ donde $x \in A$, es decir:*

$$Gr(f) = \{(x; f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

Imagen

Definición 6 *Dada una función $f : A \to B$ y un elemento $x \in A$, llamaremos la* ***imagen de*** x *al valor de f en x. Es decir al elemento $f(x) \in B$.*

El subconjunto de B formado por todas las imágenes de elementos de A se llama **imagen de** f *y se nota $Im(f)$.*

$$Im(f) = \{f(x) : x \in A\}$$

$$Im(f) = \{y \in B \text{ tal que existe } x \in A \text{ con } y = f(x)\}$$

$$Im(f) \subseteq B$$

Conjunto de ceros, positividad y negatividad.

Definición 7 *Dada una función $f : A \to B$.*

- *Llamamos* ***conjunto de ceros de*** f *al conjunto formado por todos los elementos $a \in A$ que cumplen que $f(a) = 0$. Lo denotaremos $C^0(f)$.*

$$C^0(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$$

- *Llamamos **conjunto de positividad de** f al conjunto formado por todos los elementos a en A que cumplen que $f(a) > 0$. Lo denotaremos $C^+(f)$.*

$$C^+(f) = \{a \in A : f(a) > 0\}$$

- *Llamamos **conjunto de negatividad de** f al conjunto formado por todos los elementos a en A que cumplen que $f(a) < 0$. Lo denotaremos $C^-(f)$.*

$$C^-(f) = \{a \in A : f(a) < 0\}$$

Observación: Podemos calcular el conjunto de ceros de f observando la intersección de su gráfico con el eje x. Análogamente, podemos hallar el conjunto de positividad de f (respectivamente de negatividad) observando en qué puntos de su gráfico de encuentran por arriba (respectivamente por debajo) de dicho eje.

Propiedades: Dada una función $f : A \to B$.

- Los conjuntos $C^0(f)$, $C^+(f)$ y $C^-(f)$ son disjuntos dos a dos.

  Es decir, ningún punto del dominio de f puede pertenecer simultaneamente a dos de esos conjuntos.

- $C^0(f) \cup C^+(f) \cup C^-(f) = A$

  Es decir, todo valor del dominio de f pertenece a uno y sólo uno de estos conjuntos.

Crecimiento, decrecimiento y extremos

Definición 8 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **estrictamente creciente** en el intervalo I contenido en A si para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ vale que $f(x_1) < f(x_2)$.*

Definición 9 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **estrictamente decreciente** en el intervalo I contenido en A si para todo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ vale que $f(x_1) > f(x_2)$.*

Definición 10 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f tiene un **máximo relativo (ó local)** en $x = x_1$ si $f(x) \leq f(x_1)$ para todos los x "cercanos" a x_1.*

Definición 11 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f tiene un **máximo absoluto (ó global)** en $x = x_1$ si $f(x) \leq f(x_1)$ para todos los $x \in A$.*

Definición 12 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f tiene un **mínimo relativo (ó local)** en $x = x_1$ si $f(x) \geq f(x_1)$ para todos los x "cercanos" a x_1.*

Definición 13 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f tiene un **mínimo absoluto (ó global)** en $x = x_1$ si $f(x) \geq f(x_1)$ para todos los $x \in A$.*

Inyectividad, suryectividad y biyectividad

Definición 14 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **inyectiva** si para todo $x_1, x_2 \in A$ distintos ($x_1 \neq x_2$) vale que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definición 15 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **sobreyectiva o suryectiva** si para todo $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Es decir, si $Im(f) = B$.*

Definición 16 *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.*

Bibliografía

[1] Altman, Silvia; Comparatore, Claudia; Kurzrok, Liliana*Matemática 1: Funciones 1*, Longseller, Buenos Aires.

[2] Altman, Silvia; Comparatore, Claudia; Kurzrok, Liliana*Matemática 2: Funciones 2*, Longseller, Buenos Aires.

[3] Altman, Silvia; Comparatore, Claudia; Kurzrok, Liliana*Matemática 3: Números y sucesiones*, Longseller, Buenos Aires.

[4] Stewart, James; Redlin, Lothar; Watson, Saleem *Precálculo QUINTA EDICIÓN, Matemáticas para el cálculo*, Cengage Learning.

[5] Trillini, M. P. y Murúa, R. (2016). "Práctica 2" de la materia *Introducción a la Matemática*. Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS).

Índice general

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

ISBN 978-987-3700-56-9

9 789873 700569

Universidad Nacional de Moreno
Av. Bartolomé Mitre N° 1891, Moreno (B1744OHC), prov. de Buenos Aires, Argentina
(0237) 466-7186 / 1529 / 4530
(0237) 488-3151 / 3147 / 3473
(0237) 425-1786 / 1619
(0237) 462-8629
(0237) 460-1309
www.unm.edu.ar
www.facebook.com/unimoreno

UNM 2010
UNIVERSIDAD DEL
BICENTENARIO
ARGENTINO