UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO
2010 - 2020

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

COPRUN 2020

CURSO DE ORIENTACIÓN Y PREPARACIÓN UNIVERSITARIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

Rector
Hugo O. ANDRADE

Vicerrector
Manuel L. GÓMEZ

SECRETARIAS RECTORADO

Secretaria Académica
Roxana S. CARELLI

Secretaria de Investigación, Vinculación Tecnológica y Relaciones Internacionales
Adriana M. del H.SÁNCHEZ

Secretario de Extensión Universitaria
Alejandro A. OTERO a/c

Secretaria de Administración
Graciela C. HAGE

Secretario Legal y Técnico
Guillermo E. CONY

Secretario General
Alejandro A. OTERO

CONSEJO SUPERIOR

Autoridades
Hugo O. ANDRADE
Manuel L. GÓMEZ
Pablo A. TAVILLA
Roberto C. MARAFIOTI

Consejeros
Claustro docente:
M. Beatriz ARIAS
Adriana A. M. SPERANZA
Cristina V. LIVITSANOS (s)
Adriana M. del H. SANCHEZ (s)

Claustro estudiantil
Facundo E. DE JESÚS
Patricia M. ROMANO

Claustro no docente
C. Fabian DADDARIO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

Directora - Decana
M. Liliana TARAMASSO a/c

Ingeniería en Electrónica
Coordinador - Vicedecano
Gabriel F.C. VENTURINO

Licenciatura en Gestión Ambiental
Coordinador-Vicedecano

Arquitectura
Coordinador - Vicedecano
Daniel E. ECHEVERRY a/c

Licenciatura en Biotecnología
Coordinador - Vicedecano
Fernando C. RAIBENBERG

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN

Director - Decano
Pablo A. TAVILLA

Licenciatura en Relaciones del Trabajo
Coordinadora - Vicedecana
Sandra M. PÉREZ

Licenciatura en Administración
Coordinador - Vicedecano
Marcelo A. MONZÓN

Licenciatura en Economía
Coordinador - Vicedecano
Alejandro L. ROBBA

Contador Público Nacional
Coordinador - Vicedecano
Alejandro A. OTERO

DEPARTAMENTO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Director - Decano
Roberto C. MARAFIOTI

Licenciatura en Comunicación Social
Coordinadora - Vicedecana
Adriana A. M. SPERANZA

Licenciatura en Trabajo Social
Coordinadora - Vicedecana
M. Patricia JORGE a/c

Área de Educación
Coordinadora-Vicedecana
Lucía ROMERO

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Curso de Orientación y
Preparación Universitaria

COPRUN 2020

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MORENO

Chorny, Fernando
Taller de Resolución de Problemas : COPRUN 2020 / Fernando Chorny ; Pablo Coll ; Laura Pezzatti - 9a ed . - Moreno : UNM Editora, 2020.
152 p. ; 29 x 21 cm. - (Biblioteca COPRUN / Demitrio, M. Lorena)

ISBN 978-987-782-019-5

1. Matemática. I. Coll, Pablo II. Pezzatti, Laura III. Título
CDD 510

Colección: Biblioteca COPRUN
Directora: Lorena DEMITRIO

Autores: Pablo COLL; Fernando CHORNY; Laura PEZZATTI

Las imágenes que integran esta publicación pertenecen a Pablo COLL; Fernando CHORNY; Laura PEZZATTI.

9.ª Edición

Av. Bartolomé Mitre N.° 1891, Moreno (B1744OHC),
Prov. de Buenos Aires, Argentina
(+54 237) 466-1529/4530/7186
(+54 237) 488-3147/3151/3473
(+54 237) 425-1619/1786
(+54 237) 460-1309
(+54 237) 462-8629
Interno: 154
unmeditora@unm.edu.ar

ISBN (edición digital): 978-987-782-022-5

La edición en formato digital de esta obra se encuentra disponible en:
www.unm.edu.ar/index.php/unm-virtual/biblioteca-digital

http://www.unmeditora.unm.edu.ar/index.php/colecciones/biblioteca-coprun

Libro de edición argentina.

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723.

Se terminó de imprimir en febrero de 2020 en los talleres gráficos de Ofinsumos S.A. Tucumán 738 CABA.

MATERIAL DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA

REUN
RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES

editora
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

LUA
Libro Universitario Argentino

Presentación

La Universidad Nacional de Moreno (UNM), creada en el año 2010, tiene como propósito promover la generación y transmisión de conocimientos, entendiendo el acceso a la Educación Superior como un derecho humano universal.

En este marco, la UNM ha elaborado el presente material didáctico para ser utilizado en el Curso de Orientación y Preparación Universitaria (COPRUN), y lo distribuye en forma gratuita, a fin de facilitar a sus ingresantes el material de estudio necesario para esta primera etapa.

El COPRUN es la puerta de acceso a la vida universitaria y su finalidad es acompañar a los ingresantes, brindarles herramientas y metodologías de trabajo que les permitan no solo acceder sino también permanecer en la Universidad. Pretende, asimismo, desarrollar la capacidad de interpretar y comunicar información, razonar creativamente, resolver problemas. En síntesis, generar confianza en las capacidades propias y dar instrumentos para que los alumnos puedan abordar y sortear las dificultades del aprendizaje universitario.

El actual Curso, aprobado por Resolución UNM-CS N° 450/18, contempla mecanismos de evaluación basados en la asistencia y en el cumplimiento de las actividades prácticas señaladas por los docentes, y está compuesto por tres talleres: Taller de Resolución de Problemas, Taller de Lectura y Escritura Académicas y Taller de Ciencias; y el Seminario “Aproximación a la Vida Universitaria”.

El Taller de Resolución de Problemas presenta las modalidades de la construcción del conocimiento desde la lógica formal. El Taller de Lectura y Escritura Académicas aborda el desarrollo de habilidades de comprensión, comunicación y producción escrita. El Taller de Ciencias acerca a los alumnos a los principales métodos y conceptos que se ponen en juego en la producción del conocimiento científico. El seminario “Aproximación a la vida universitaria” apunta a crear el oficio de estudiante universitario a partir de encuentros de intercambio con docentes, no docentes y otros actores institucionales.

¡Quienes hacemos la UNM les damos la bienvenida a esta comunidad educativa! La presente edición fue coordinada por la Dirección de Articulación, Orientación e Ingreso, a cargo de a Lic. Lorena Demitrio.

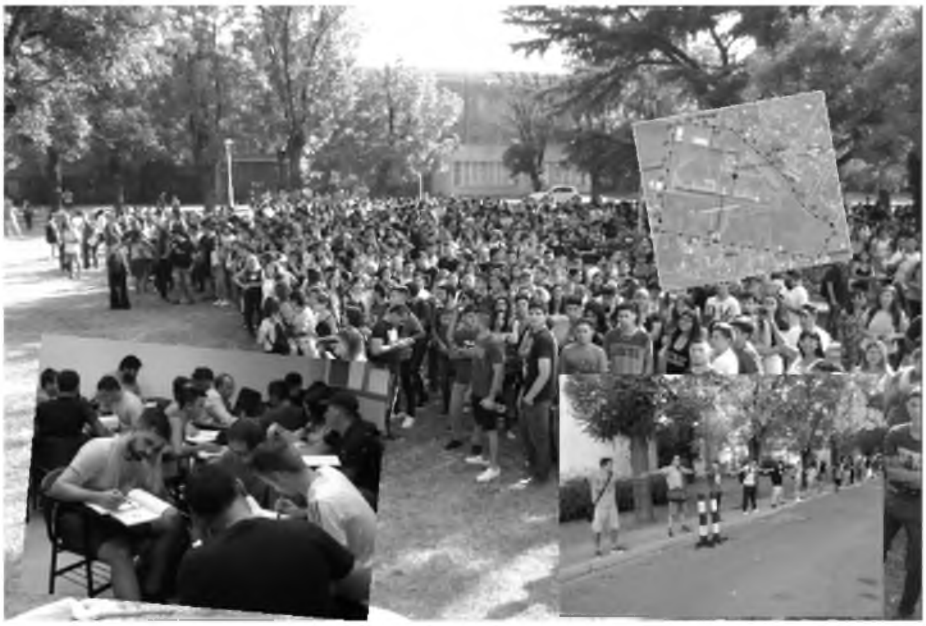
Roxana Carelli
Secretaria Académica

Introducción

Estimados estudiantes

Bienvenidos a la Universidad.

Bienvenidos a una etapa de formación y de trabajo intelectual, que esperamos les resulte enriquecedora.



La mayoría de los ciclos de preparación universitaria cuentan con alguna propuesta en el área de matemática. Suele preguntarse por qué puede ser importante aprender matemática. Y también por qué hacerlo en un **Taller de Resolución de Problemas**. ¿Qué es un taller? ¿En qué se diferencia de otro tipo de propuesta?

Veamos. . . La matemática es una de las maneras que tenemos de organizar nuestro pensamiento y de describir, analizar y resolver situaciones de tipos muy diversos. No es la única manera. Pero es suficientemente importante como para poder afirmar que si una persona ha desarrollado su pensamiento matemático es más completa y está posicionada con más recursos para interactuar con la realidad.

La adquisición y el manejo de recursos para pensar matemáticamente y resolver problemas es un aspecto importante del perfil de cualquier estudiante universitario y ésta es la razón por la que el TRP se destina a todos los ingresantes.

La propuesta de taller se caracteriza por ser una modalidad en la que se espera que ustedes estén participando en forma activa. No vendrán a sentarse en silencio. No habrá un profesor o una profesora que explica mientras ustedes escuchan. Estarán convocados a *hacer*. Se recurrirá a los conocimientos que traigan de su paso por la escuela y se los orientará para que puedan recuperar los que tengan olvidados y necesiten para el cursado de las carreras. Se encontrarán con docentes que les propondrán preguntas y problemas; que intervendrán –si es necesario– para ayudarlos a que comprendan en qué consiste el problema. En general no les darán respuestas, sino que les devolverán las preguntas y ustedes tendrán que volver a los problemas con esas nuevas preguntas para repensarlos, ajustar las primeras aproximaciones o cambiar el enfoque, renovar el agua del mate y comenzar otra vez.

Será imprescindible aprender a trabajar en grupo con otros compañeros y compañeras. Sus docentes los ayudarán a reunirse, a vincularse, a debatir, a pensar juntos. Uno aprende cuando otro compañero o compañera le explica y aprende también cuando le toca explicarle a alguien más.

Esperamos que la propuesta del **Taller de Resolución de Problemas** les resulte atractiva y desafiante. Tienen permiso y libertad para probar y equivocarse al pensar las soluciones a los problemas propuestos. Valen todos los intentos. Incluso proponer soluciones aunque crean que pueden no ser correctas. Descubrir un error en una solución es también una manera de comprender mejor el problema.

¡Bienvenidos a la oportunidad de un encuentro amistoso con la matemática!

Estructura del cuadernillo

El cuadernillo que reciben será la guía de todo el desarrollo del TRP. Se compone de:

- Una selección de problemas, organizados en secciones. Los títulos de las secciones figuran en el índice y se corresponden con los temas que irán abordando en cada clase: Entrando en calor, Producción de fórmulas, etc.

  Pero si recorren un poco el índice y el cuadernillo verán que es más extenso que lo que la duración del COPRUN permitiría abarcar. Esto se debe a que no todos los estudiantes harán el mismo uso del cuadernillo.

  La universidad está organizada en Departamentos que agrupan las distintas carreras. Las comisiones del TRP fueron organizadas por Departamento. Esto significa que ustedes estarán en una comisión junto a otros compañeros y compañeras que cursarán carreras dependientes del mismo Departamento. Algunas carreras[1] tienen en sus planes de estudio materias de matemática y otras no[2]. Por eso algunas comisiones trabajarán con un poco más de énfasis en algunos temas que en otros y harán distintos recorridos del mismo cuadernillo.

  Varios problemas del cuadernillo están pensados para desarrollarse necesariamente en una clase. Porque tienen consignas que requieren trabajar en grupo, sostener debates colectivos, comparar distintas soluciones y otros tipos de prácticas que no podrían hacerse en forma individual (o que serían menos atractivas). Otros problemas se pueden pensar en cualquier momento, trabajando en casa, en la biblioteca de la universidad o en los espacios de tutorías. Sus docentes les irán indicando los problemas con los que pueden trabajar por fuera del horario de clase y les recomendarán inclusive algunos en particular que puedan servir para reforzar los temas trabajados en el taller.

  Algunos estudiantes que ingresaron en años anteriores a nuestra universidad ya han descubierto el enorme valor que tiene reunirse a estudiar en grupo. Estudiando con compañeros y compañeras uno siempre tiene a quién recurrir cuando algo no se comprende. Es un aprendizaje para quien recibe una explicación de un par como para el que debe esforzarse en dar la explicación y ser comprendido. Tenemos una Biblioteca con una generosa variedad de libros, con mesas amplias en las que pueden sentarse varios compañeros y compañeras juntos y atendida por profesionales muy capaces y con gran voluntad de ayudar.

  Además de la selección de problemas mencionada, el cuadernillo se compone de estas otras secciones:

- **Apéndice A: Complemento Teórico.** Acá encontrarán material teórico especialmente elaborado por la coordinación del TRP para acompañar el desarrollo de los encuentros. Desde luego, este material se puede (y se debería) complementar con la bibliografía que también se recomienda en el cuadernillo (leer más abajo: Apéndice D: Bibliografía). Por el estilo de trabajo que se propondrá en el taller, será muy importante que se le dé al material teórico el tipo de uso recomendado. Lean con mucha atención estas recomendaciones en la introducción del apéndice (página 81).

- **Apéndice B: Figuras.** Muchos de los problemas del taller se acompañan de figuras, gráficos, etc. En este apéndice se reúnen varias de ellas, debidamente numeradas para que sea fácil ubicarlas cuando las necesiten.

- **Apéndice C: Glosario.** Esta sección funciona como un breve diccionario de terminología específica que irá apareciendo durante el taller. Es una mezcla de definiciones técnicas y explicaciones, todas muy serias aunque casi siempre con algún toque de humor. Últimamente hemos incorporado al glosario definiciones propuestas por estudiantes que participaron del taller en ediciones anteriores.

[1] Ingeniería en Electrónica, Licenciatura en Gestión Ambiental, Licenciatura en Biotecnología, Licenciatura en Economía, Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración, Licenciatura en Relaciones del Trabajo y Arquitectura

[2] Trabajo Social y Licenciatura en Comunicación Social

- **Apéndice D: Bibliografía.** Es una lista de libros recomendados y reseñados, es decir, con comentarios que explican de qué se tratan. La lectura de textos matemáticos es toda una especialidad, dentro de la lectura académica. Sobre todo para quienes tendrán materias de matemática en sus carreras, los libros aquí recomendados son una buena puerta de entrada hacia este tipo de lectura. También encontrarán recomendaciones de páginas web.

Hábitos de estudio

Parte de la preparación universitaria que el COPRUN les quiere brindar es que se vayan acostumbrando a estudiar por su cuenta. Los docentes irán dando pautas. Pero muy de a poco –tal vez a lo largo de todo el primer año de carrera– irán notando que cada vez son menos las pautas de los docentes y cada vez más serán ustedes mismos los que necesitarán ir dándose cuenta de que necesitan estudiar para llevar las materias al día. Son dos aprendizajes necesarios: aprender las materias y aprender a estudiar las materias. Esa práctica ya comienza en el COPRUN.

Hay algunas preguntas que pueden acompañar este aprendizaje:

- ¿Tengo la sensación de que comprendí?
- ¿Consigo separar partes de la clase que comprendí de otras que no?
- ¿Me doy cuenta de qué recursos me ayudan a comprender?
  - Intervenciones del/la docente.
  - Explicaciones de mis compañeros.
  - Mis propios apuntes de la clase.
  - Los apuntes de otra persona.
  - Un libro.
  - Una página de Internet.
  - Un gráfico.
  - Un ejemplo.
  - Un video.
- ¿Soy capaz de procurarme yo mismo esos recursos?

La reflexión sobre este tipo de preguntas tiene que ver con aprender a estudiar. Con aprender a conocerse a uno mismo como estudiante y aprender a tomar las decisiones que más le convienen a uno para aprender.

Confiamos en que ustedes mismos, con la ayuda de sus docentes y de sus propios compañeros, irán transitando este camino.

Condiciones de aprobación

Es necesario para que el TRP se considere aprobado y para poder inscribirse en las materias de los primeros años de las carreras:

- Tener por lo menos el 75 % de asistencia (se puede faltar a un máximo de 2 clases).
- Cumplir con la realización de los Trabajos Prácticos (TP) presenciales que los docentes irán indicando cuando les informen el cronograma.
- Cumplir con las Entregas que los docentes les irán pidiendo a lo largo de la cursada.

1. Entrando en Calor

Problema 1 **"Problema del cartero."** Esta actividad es para realizar en parejas. Pónganse en pareja con un compañero o compañera.

a) El/la docente le dará a cada pareja una hoja con un dibujo y una hoja en blanco. En esta última cada pareja debe escribir una descripción del dibujo que tiene, para que otra pareja del aula, leyendo la descripción, pueda reproducirlo. La descripción solo puede tener texto escrito (letras y/o números). Pero no puede haber ningún tipo de dibujo o información gráfica.

b) Una vez escritas las instrucciones, las intercambiarán con alguna pareja del aula que su docente les indicará. Intenten dibujar la figura que corresponde a la descripción recibida. No está permitido pedir más información ni preguntarle nada a la pareja que redactó las instrucciones.

c) Cuando hayan terminado de dibujar, su docente les indicará de qué manera pueden comparar la reproducción que hayan elaborado con la figura original. Discutan acerca de los aspectos que salieron bien y los que no. Intenten identificar problemas en la redacción de las instrucciones o en la interpretación de las mismas. Los detalles de esta discusión serán compartidos luego en un debate de toda la clase, moderado por el/la docente.

Problema 2 La calculadora de Fran no anda bien: hay dos teclas (no sabemos cuáles son) que están intercambiadas. Es decir, cuando uno aprieta una de las teclas, la calculadora hace la cuenta con el número que corresponde a la otra. Al hacer algunas cuentas obtenemos los siguientes resultados:

- $6 + 8 = 14$
- $2 + 5 + 6 = 15$
- $1 + 2 + 3 + 8 = 12$

A partir de estos resultados ¿podrán descubrir cuáles son los números intercambiados?

Problema 3 Escriban algunos términos más en las sucesiones numéricas y expliquen claramente por escrito por qué las continuaron así:

a) 3, 7, 11, 15,...

b) 2, 2, 4, 4, 2, 6, 6, 2, 8, 8, 16, 8, 24, 8, 32,...

c) 1, 3, 5, 7,...

d) 1, 4, 9, 16,...

e) 2, 4, 8, 14, 22,...

f) 2, 4, 8, 16, 32,...

g) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12,...

h) 1, 1, 3, 5, 11, 21...

i) 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0,...

j) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,...

k) 3, 6, 12, 24, 48, 96,...

l) 5, 8, 11, 14, 17, 20,...

Problema 4 Juego: “Ni muy, muy, ni tan, tan”

Este juego consiste en proponer y descubrir sucesiones. Reglamento:

(I) Se juega por rondas. Participan N jugadores (N es el número de alumnos en la clase). Un jugador que va rotando en cada ronda es el **moderador**. Los otros $N-1$ son **exploradores**.

(II) El moderador debe pensar una sucesión que responda a una ley de formación que haya diseñado y escribir en el pizarrón los cinco primeros términos. En una hoja privada escribirá los cinco términos siguientes.

(III) Cada explorador debe anotar en una hoja los cinco términos siguientes de la sucesión y una explicación o fórmula que indique por qué la sucesión continúa de esa manera.

(IV) Si después de dos minutos (este tiempo se puede ajustar, según acuerden los participantes y el/la docente) nadie consiguió escribir nada, se puede solicitar al moderador que escriba cinco términos más en el pizarrón. En tal caso, el objetivo de los exploradores será escribir los siguientes cinco términos, después de los diez que figuren en el pizarrón.

(V) Al cabo de dos minutos (tiempo también ajustable) todos terminan de escribir, el moderador revela la solución y se hace el conteo de cuántos acertaron y cuántos no (se apela a la honestidad de los participantes para avisarlo).

(VI) Puntaje: el puntaje se distribuye de la siguiente manera:

- Puntaje para el moderador: se cuenta cuántos acertaron y cuántos no; el moderador recibe el menor de esos dos números.
- Puntaje para el explorador: Cada explorador que acertó recibe $\frac{N}{4}$ puntos, donde N es el número de jugadores. Los exploradores que no acertaron reciben 0 (cero) puntos.

Nota 1: si el número N de jugadores es demasiado alto para el desarrollo dinámico del juego, se puede jugar en equipos de 3 ó 4 jugadores.

Nota 2: Antes de jugar, respondan: ¿cuál es el objetivo que tendrá el reglamento para asignar los puntajes de la manera indicada?

Problema 5 La suma de seis números es par, el producto de los cuatro primeros es impar y el último número es par. ¿Se puede saber si el quinto número, es par o impar? ¿O depende de cuáles sean los números? Justifiquen la respuesta.

Problema 6 En mis vacaciones del año pasado llovió 9 días, y hubo 10 mañanas y 10 tardes soleadas. Cuando llovió por la mañana, la tarde fue soleada. ¿Cuántos días duraron mis vacaciones?[1]

Problema 7 Como todos sabemos, las personas a veces mienten. También es cierto que muchas veces las personas dicen la verdad. Y distintas personas tienen más o menos tendencia a mentir. Lo más complicado del asunto es que las personas que mienten no mienten siempre y uno no puede saber, en cada oportunidad, si están siendo mentirosas o veraces. Seguramente el mundo sería mejor si algunas personas no mintieran tanto. Pero, para bien o para mal, sin duda sería más ordenado y previsible si las personas que mienten mintieran **siempre** y las que dicen la verdad dijeran **siempre** la verdad. En un mundo así, la lógica sería muy útil para decidir si estamos en presencia de un veraz o de un mentiroso. Los veraces y mentirosos proporcionan una fuente inagotable de acertijos. Muchos de ellos son verdaderos clásicos. Discutan, por ejemplo, acerca de la situación propuesta en esta viñeta:

[1] Este problema está tomado del libro [22].

Problema 8 El vecino de Patrick miente siempre martes, jueves y sábados y es completamente veraz el resto de los días. Si un día particular Patrick sostiene con su vecino el siguiente diálogo:

- Patrick: ¿Qué día es hoy?
- Vecino: Sábado.
- Patrick: ¿Qué día será mañana?
- Vecino: Miércoles.

¿Podemos decidir de qué día de la semana se trata? Justifiquen la respuesta y, en caso afirmativo, decidan qué día es.

Problema 9 Ana, Bety, Carlos, Dora y Eduardo salen a comer y eligen para tomar entre Fantius, Cocus Cola y Spritin. Se sabe que:

- Los que tomaron Cocus Cola fueron una mayor cantidad que los que tomaron Fantius y Spritin.
- Todas las bebidas fueron elegidas por al menos una persona.
- Carlos y Eduardo tomaron la misma bebida.
- Carlos y Dora eligieron diferentes bebidas para tomar.
- Bety no tomó Cocus Cola y Dora no tomó Fantius.

¿Qué eligió cada uno para tomar?

Problema 10 Laura, Patricio y Sergio salen a comer frecuentemente. Cada uno de ellos ordena Cocus Cola o Spritin para la comida con las siguiente condiciones:

- Si Laura pide Cocus, entonces Patricio ordena la misma bebida que Sergio.
- Si Patricio ordena Cocus, entonces Laura pide la bebida que Sergio no pidió.
- Si Sergio pide Spritin, entonces Laura ordena la misma bebida que Patricio.

¿Quién toma siempre la misma bebida?

Problema 11 Se denunció un robo de dinero y la policía detuvo a 4 sospechosos. Los 4 fueron interrogados y se sabe que sólo uno dijo la verdad. El problema consiste en leer lo que dijo cada uno y encontrar razones que demuestren quién fue el que dijo la verdad. Aquí está la declaración de cada uno:

- Sospechoso 1: “Yo no robé el dinero”.
- Sospechoso 2: “El Sospechoso 1 miente”.
- Sospechoso 3: “El Sospechoso 2 miente”.

- Sospechoso 4: “El Sospechoso 2 fue el que robó el dinero”.

¿Quién dijo la verdad? ¿Por qué no otro?

Problema 12 LA ESCALADA: Se tienen las siguiente pistas acerca de un grupo de escaladores:

- El escalador más joven de los cuatro ha empleado menos tiempo en su escalada que Luis.
- El que escaló el Pico de Puma es un año mayor que el que empleó 62 minutos en su escalada y le lleva dos años al que escaló el Pico de Lobo.
- El que empleó 50 minutos es primo de José y hermano del que necesitó 60 minutos para escalar su pico.
- El pico de Cuervo fue escalado en menos tiempo que el Pico de Lobo.
- Pedro es un año mayor que el compañero que escaló el Pico de León.
- El que necesitó 64 minutos para completar su escalada es dos años mayor que Luis.

Se sabe que los nombres de los escaladores son: Luis, Pedro, Juan y José y que alguno de ellos tiene 20 años, otro tiene 21, otro tiene 22 y otro tiene 23. Cada uno escaló un pico distinto. Descubran qué escalador escaló cada pico, cuánto tiempo le llevó y qué edad tiene cada escalador.

Problema 13 Un sultán propuso el siguiente problema a un reo. He aquí tres cofres; uno rojo, otro azul y otro blanco. Y cada uno tiene una inscripción:

a) En el rojo dice: “La llave de la celda está en este cofre”.
b) En el azul dice: “la llave de la celda no está en este cofre”.
c) En el blanco dice: “la llave de la celda no está en el cofre rojo”.

De las tres inscripciones, a lo sumo una es cierta. Si sos capaz de adivinar en cuál está la llave te dejaré ir libre.
¿En qué cofre se encuentra la llave?[2]

[2] Problema tomado del libro [22].

2. Lectura y comprensión de enunciados

Instrucciones y construcciones

Problema 14 En una hoja en blanco suelta dibujá una colección de figuras que cumpla todas estas condiciones:

(i) Hay a lo sumo dos figuras que no son cuadrados.
(ii) Hay un cuadrado que es más chico que todos los demás cuadrados.
(iii) No hay un cuadrado que sea más grande que todos los demás cuadrados.
(iv) La más pequeña de las figuras no es un cuadrado.

Poné tu nombre en la hoja y entregala a tu docente.

Problema 15 Acá se propone otra secuencia de instrucciones para cumplir:

En una hoja en blanco suelta dibujá una colección de figuras que cumpla todas estas condiciones:

(i) Cada figura tiene un número escrito en su interior.
(ii) Hay dos de las figuras que no son un cuadrado.
(iii) Hay dos de las figuras que no son un círculo.
(iv) Hay dos de las figuras que no son un triángulo.
(v) Hay dos de las figuras que no tienen escrito un número 3.
(vi) Hay dos de las figuras que no tienen escrito un número 7.
(vii) Hay dos de las figuras que no tienen escrito un número 9.

Comparen sus producciones con la de otro compañero o compañera. ¿Son correctas? ¿Encuentran errores? ¿Pueden explicarlos?

Problema 16 En una hoja en blanco suelta escriban una secuencia de números enteros que cumpla todas estas condiciones:

(i) Hay a lo sumo dos números impares.
(ii) Hay un número par menor a todos los demás números pares.
(iii) Ningún número par es mayor que todos los demás números pares.
(iv) El menor número es impar.

Comparen sus producciones con la de otro compañero o compañera. ¿Son correctas? ¿Encuentran errores? ¿Pueden explicarlos?

Problema 17 Mezclando números. Consideren la siguiente lista de dígitos (los dígitos son los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, con los que formamos todos los números enteros).

$$2\ 7\ 4\ 5\ 3\ 8\ 9$$

Mezclen los dígitos de acuerdo a las siguientes instrucciones:

(i) Trasladen el segundo mayor de ellos hacia el centro de la lista.
(ii) Intercambien los que quedaron en los extremos de la lista.
(iii) Leyendo de izquierda a derecha, consideren el primero de los dígitos que tiene inmediatamente a su derecha un dígito mayor que él e intercámbienlos de lugar.
(iv) Tomen el dígito del centro y trasládenlo al extremo derecho de la lista.

Comparen la lista mezclada con las de sus compañeros. ¿Son iguales? ¿Hubo instrucciones interpretadas de distinta manera?

Problema 18 Consideren la siguiente lista de letras:

F A M D P B

Describan mediante instrucciones una secuencia de movimientos de las letras que deje a la lista ordenada alfabéticamente, si:

a) Los movimientos permitidos consisten en intercambiar de lugar dos letras.
b) Los movimientos permitidos consisten en trasladar una letra hacia un extremo de la fila o insertarla entre otras dos.
c) Los movimientos permitidos son cualquiera de los dos anteriores.

¿Con qué número mínimo de instrucciones lo pueden lograr, en cada caso?

Problema 19 Para resolver en clase. Seguramente muchos de ustedes conocen el juego popular de cartas denominado Truco. Sepárense en dos grupos:

Grupo 1: Los que conocen las reglas del Truco.
Grupo 2: Los que no las conocen.

a) Cada integrante del Grupo 1 debe redactar en una hoja unas reglas que expliquen cómo se suman los puntos del envido. Importante: deben redactar una explicación general; no está permitido mencionar ejemplos concretos.
b) Luego cada integrante del Grupo 2 deberá leer alguna de las reglas redactadas y mostrar construyendo ejemplos que comprendieron cómo se suman los puntos del envido.

¿Funcionaron los ejemplos? ¿Fueron claras las instrucciones? ¿Fueron ambiguas? ¿Fueron incompletas? ¿fueron bien interpretadas? Debatan al respecto.

Problema 20 El juego de las banderas. Cada conjunto de instrucciones de los que se ofrecen a continuación describe la bandera de algún país. El objetivo del problema es averiguar a qué país corresponde cada bandera.

a)

Bandera en proporción tres de alto por cinco de ancho.
En cinco franjas horizontales.
La central de color rojo es del doble de ancho de las demás.
Las de los extremos son azules y las otras dos blancas.

b)

Bandera en proporción dos de alto por tres de ancho en cinco franjas horizontales.
La central de color rojo es del doble de ancho de las franjas exteriores que son verdes.
Las franjas que separan las exteriores de la central son la mitad de ancho que las exteriores y son blancas.

La franja central tiene en el centro una estrella amarilla de cinco puntas con una punta para arriba que ocupa todo el ancho de la franja.

c)

Bandera en proporción tres de alto por cinco de ancho formada por un paño rojo, con una franja vertical de color blanco en el lado del asta. El borde de esta franja, que separa ambos colores, tiene forma de sierra dentada de cinco puntas.

d)

La bandera es horizontal, en proporción 2:3.

Tiene un triángulo rectángulo tal que uno de sus catetos es todo el lado de la bandera que va contra el asta, el otro está sobre el borde superior y llega desde el asta hasta dos tercios del mismo. Ese triángulo es verde.

Tiene otro triángulo igual al anterior, pero uno de sus catetos coincide con el borde de la bandera opuesto al asta y el otro está sobre el borde inferior, tiene un extremo en el vértice inferior derecho y ocupa dos tercios de dicho borde.

Ese triángulo es rojo.

El resto de la bandera (esta información es redundante, pero sirve como control para la construcción) es una franja diagonal que técnicamente es un paralelogramo, dos de cuyos lados son las hipotenusas de los triángulos anteriormente descritos, mientras que los otros dos están sobre los bordes inferior y superior de la bandera, ocupando el tercio restante de los mismos.

El paralelogramo es amarillo.

Problema 21 Para operar en los cajeros automáticos, un usuario tiene la clave alfabética de tres letra “LEA”. En una etapa de la operación, el cajero le muestra el siguiente cartel:

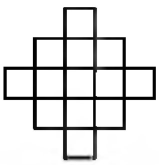
INGRESE SU CLAVE ALFABÉTICA
SELECCIONE UNA SOLA VEZ Y EN ORDEN
CADA GRUPO DE LETRAS DONDE VEA LAS
LETRAS DE SU CLAVE

$\boxed{1}$ < ———SWF	VPR——— > $\boxed{2}$
$\boxed{3}$ < ———TOM	NAK——— > $\boxed{4}$
$\boxed{5}$ < ———HGL	BJC——— > $\boxed{6}$
$\boxed{7}$ < ———DXQ	EZO——— > $\boxed{8}$

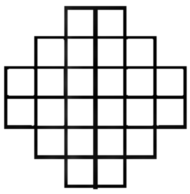
Indiquen (mediante sus números) cuáles son las teclas que hay que presionar para seguir operando en el cajero.

3. Producción de fórmulas

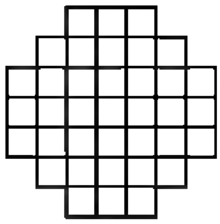
Problema 22 A continuación se muestra una secuencia de diseños. Cada diseño está identificado con un número.



Diseño 1



Diseño 2



Diseño 3

a) ¿Cuántos cuadraditos formarán el Diseño 39?

b) Se propone el siguiente desafío: en un momento determinado, un compañero dirá un número de Diseño y todos deberán estar listos para decidir lo más rápidamente posible cuántos cuadraditos forman ese Diseño. ¿Cómo pueden prepararse con anticipación?

Problema 23 Los diseños de esta otra secuencia están formados por puntitos. Cada diseño está también identificado con un número.

Diseño 1

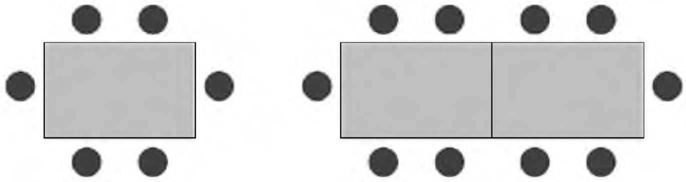
Diseño 2

Diseño 3

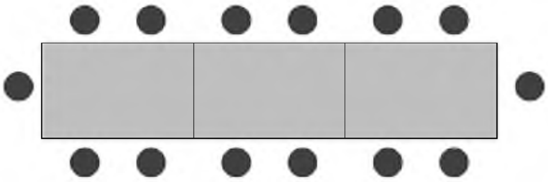
a) ¿Cuántos puntitos formarán el Diseño 318?

b) Se propone el siguiente desafío: en un momento determinado, un compañero dirá un número de Diseño y todos deberán estar listos para decidir lo más rápidamente posible cuántos puntitos forman ese Diseño. ¿Cómo pueden prepararse con anticipación?

Problema 24 En el festejo de los 150 años de un pueblo, se organiza un gran almuerzo en la calle principal. Para sentar a todos los concurrentes se colocan mesas rectangulares alineadas. En el Diseño 1 de la figura, se muestra cómo se sientan las personas alrededor de una mesa. A medida que va llegando la gente, se van agregando mesas a lo largo de la calle. En el Diseño 2 de la figura, se muestra cómo se sientan las personas alrededor de dos mesas. En el Diseño 3 se muestra cómo se sientan las personas alrededor de tres mesas.



Diseño 1: una mesa   Diseño 2: dos mesas



Diseño 3: tres mesas

a) ¿Cuántas personas podrán sentarse, como máximo, si se hace una hilera de 47 mesas? Intenten explicar la manera en que organizan el conteo.

b) ¿Cuántas mesas se necesitan para que se puedan sentar 134 personas?

c) ¿Cuántas mesas se necesitan para que se puedan sentar 239 personas? ¿Sobran lugares?

d) ¿Cómo se modifica el problema si en vez de unir las mesas por su lado más corto se unen por su lado más largo?

Problema 25 En cada cuadrado se han pintado los cuadraditos del borde. La Figura 3.1 de la página 18 muestra un cuadrado de 4×4 cuadraditos y otro de 7×7 cuadraditos[1].

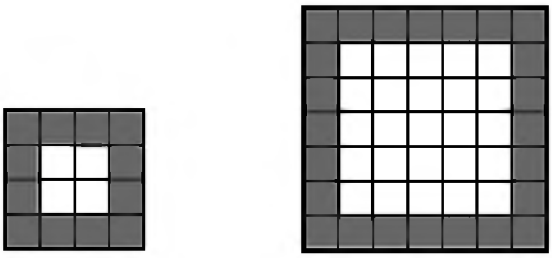


Figura 3.1: Casos 4×4 y 7×7

a) ¿Cuántos cuadraditos pintados tendrá un cuadrado de 31×31? Expliquen el conteo que organicen para responder.

b) ¿De cuánto por cuánto será un cuadrado con 132 cuadraditos pintados?

c) ¿Puede haber un cuadrado con 262 cuadraditos pintados? Si la respuesta es sí, decidan de cuánto por cuánto sería el cuadrado. Si la respuesta es no, expliquen por qué.

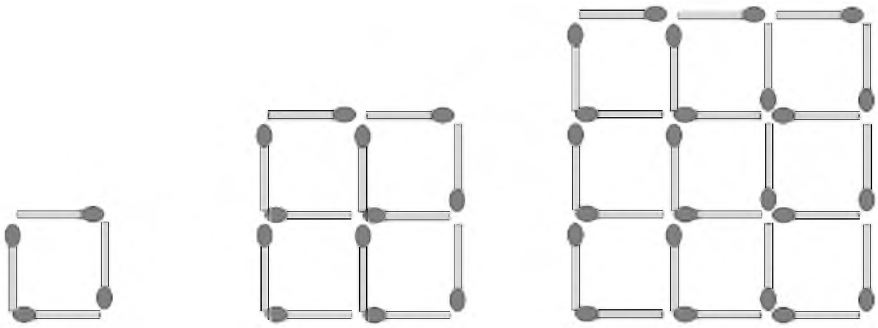
d) Escriban una fórmula que permita calcular el número de cuadraditos pintados que tendrá un cuadrado de $n \times n$ cuadraditos.

Problema 26 Margarita, conocido personaje protagonista del Problema 32, no ha abandonado el hábito de jugar con fósforos. En esta oportunidad, se entretiene armando diseños como los que se muestran en la figura.

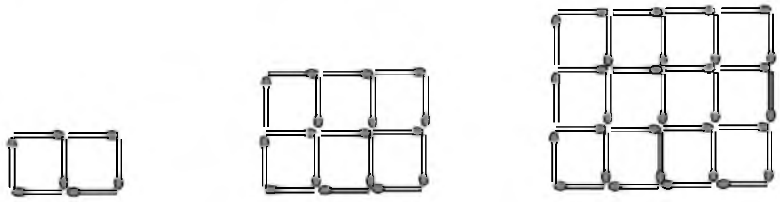
¿Cuántos fósforos formarán el cuadrado de 125×125?

Problema 27 Los siguientes diseños se van construyendo con fósforos

[1] Este problema está tomado del documento *Actualización de Programas de Primer año. Nivel Medio*, 2002, del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires



Cuadrado 1 × 1 Cuadrado 2 × 2 Cuadrado 3 × 3

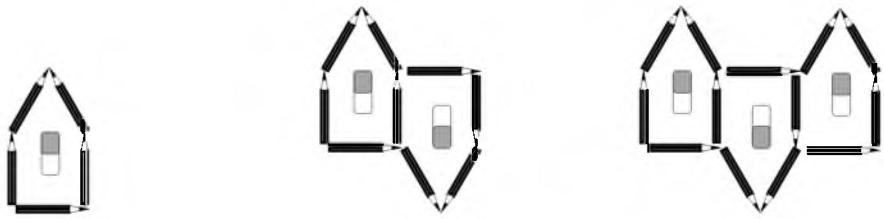


Diseño 1 Diseño 2 Diseño 3

a) ¿Cuántos fósforos serán necesarios para formar el DISEÑO 29?

b) ¿Cuál es el máximo número de diseño que se puede armar, si se dispone de 5900 fósforos?

Problema 28 En la librería de un amigo, Marcelo se entretiene construyendo hileras con lápices y gomas de borrar, como se ve en el dibujo:



Hilera con una goma Hilera con dos gomas Hilera con tres gomas

a) Si una hilera tiene 33 lápices, ¿cuántas gomas tiene?

b) ¿Se puede formar una hilera completa con exactamente 49 lápices? Si la respuesta es “no”, explicá por qué no. Si la respuesta es “sí”, averiguá cuántas gomas tiene la hilera.

c) ¿Cuántos lápices serán necesarios para construir una hilera que tenga 45 gomas?

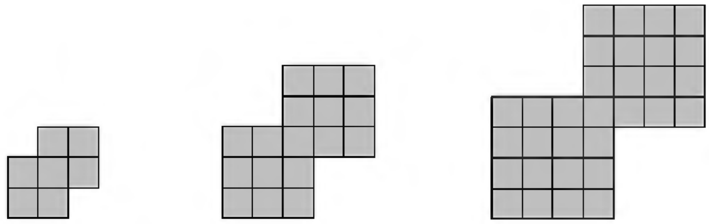
d) Propongan una fórmula que permita calcular el numero de lápices L para cada cantidad G de gomas.

e) Si no lo hicieron antes, vuelvan a responder las preguntas anteriores con la ayuda de la fórmula propuesta. ¿Obtienen los mismos resultados? ¿Es confiable la fórmula?

Problema 29 Los siguientes diseños se van construyendo con cuadraditos como éste: 

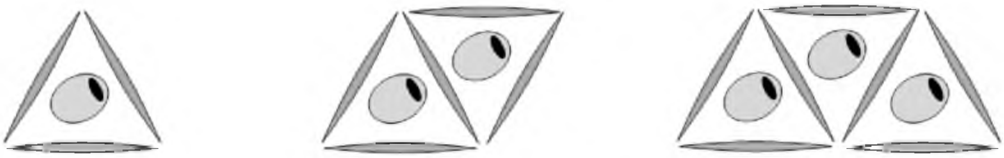
a) ¿Cuántos cuadraditos formarán el DISEÑO 53?

b) ¿Cuál es el máximo número de diseño que se puede armar, si se dispone de 1800 cuadraditos?



Diseño 1 Diseño 2 Diseño 3

Problema 30 Observen la manera en que se va construyendo una fila de aceitunas rodeadas de mondadientes:



Fila con una aceituna Fila con dos aceitunas Fila con tres aceitunas

a) Si en una fila hay 19 mondadientes, ¿cuántas aceitunas tiene la fila?

b) ¿Cuántos mondadientes serían necesarios para construir una fila con 190 aceitunas?

c) ¿Puede haber una fila que requiera exactamente 36 mondadientes?

d) Propongan una fórmula que permita calcular el número de mondadientes para cada cantidad A de aceitunas.

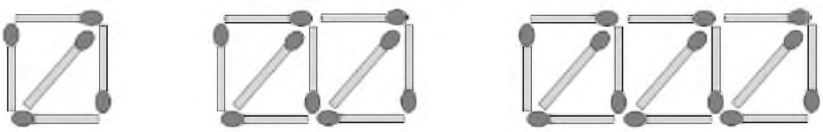
Problema 31 Las siguientes pirámides se van construyendo con cuadraditos

Pirámide 1 Pirámide 2 Pirámide 3

a) ¿Cuántos cuadraditos formarán la PIRÁMIDE 31?

b) ¿Cuál es el máximo número de pirámide que se puede armar, si se dispone de 2600 cuadraditos?

Problema 32 En la mesada de su cocina, Margarita se entretiene armando diseños con fósforos, como muestra la figura.



Diseño 1 Diseño 2 Diseño 3

a) ¿Cuál será el número del Diseño que tendrá 81 fósforos?

b) ¿Puede haber un Diseño que requiera exactamente 100 fósforos?

c) Propongan una fórmula que permita calcular el número de fósforos para cada el Diseño N.

d) ¿Cuáles son los dos primeros Diseños que estarán formados por un número de fósforos múltiplo de 7?

e) ¿Habrá Diseños formados por un número de fósforos múltiplo de 6?

Problema 33 Si la fórmula general de una sucesión es $3 \cdot N + 2$ se puede construir una tabla que indica cómo se van listando los términos de la sucesión a medida que N va tomando los valores 1, 2, 3, etc. Observen el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} N & \longrightarrow & 3 \cdot N + 2 & & \\ N = 1 & \longrightarrow & 3 \cdot 1 + 2 & \longrightarrow & 5 \\ N = 2 & \longrightarrow & 3 \cdot 2 + 2 & \longrightarrow & 8 \\ N = 3 & \longrightarrow & 3 \cdot 3 + 2 & \longrightarrow & 11 \\ N = 4 & \longrightarrow & 3 \cdot 4 + 2 & \longrightarrow & 14 \end{array}$$

En la última columna de la tabla se ven los términos de la sucesión que pueden listarse así:

$$5, 8, 11, 14, \ldots$$

Observen en cada caso la fórmula general y escriban los primeros seis términos de cada una de las sucesiones:

a) $3 \cdot N - 2$

b) $N + 4 \cdot N$

c) $N^2 - N$

d) $N \cdot (N - 1)$

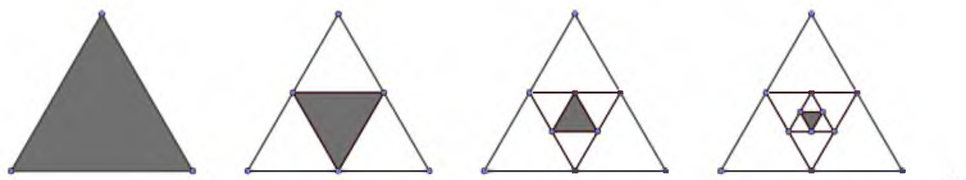
e) $5 \cdot N$

f) $(-1)^N \cdot N$

Algunas de las respuestas deberían llamarles la atención. ¿Qué cosa especial sucede y a qué creen que se debe?

Problema 34 Intenten escribir una fórmula general para las sucesiones del Problema 3. Algunas pueden ser difíciles, ¿cuántas consiguen expresar? Intercambien información con otros compañeros para comparar los resultados obtenidos.

Problema 35 La figura muestra una sucesión de triángulos equiláteros (los pintados de gris oscuro), en la que cada triángulo es más pequeño que el anterior.



Triángulo 1 Triángulo 2 Triángulo 3 Triángulo 4 ...

a) Supongan que el lado del primer triángulo mide 15 cm. ¿Cuánto mide entonces el perímetro de cada triángulo?

b) Escriban los primeros 10 términos de la sucesión de los perímetros de los triángulos.

c) Intenten escribir una fórmula general para la sucesión.

Problema 36 En cada caso se proponen tres fórmulas para una sucesión. Decidan cuáles son equivalentes, es decir, cuáles dan lugar a la misma lista de términos de la sucesión.

a)	$2 \cdot N + 3 \cdot N$	$5 \cdot N$	$6 \cdot N$
b)	$6 \cdot N^2$	$6 \cdot N$	$2 \cdot N \cdot 3 \cdot N$
c)	$13 \cdot N - (7 \cdot N - 4 \cdot N)$	$13 \cdot N - 7 \cdot N + 4 \cdot N$	$13 \cdot N - 7 \cdot N - 4 \cdot N$
d)	$\frac{8 \cdot N + 4}{N}$	$\frac{12}{N}$	$8 + \frac{4}{N}$

Problema 37 La misma consigna que en el Problema 36

a)	$N(N+1)$	$2N+N$	N^2+N
b)	$(N-1)^2$	N^2-1	N^2-2N+1
c)	$N+1$	$\frac{N^2+1}{N}$	$N+\frac{1}{N}$
d)	$(N+3)^2$	N^2+6N+9	N^2+9

Problema 38 Decidan, en cada caso, si alguna de las expresiones –en las que a, b, c y d pueden ser cualquier número– es equivalente a la dada:

$$\begin{tikzcd} & a-b\cdot c+b\cdot d \\ a-b\cdot(c+d) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & a-b\cdot c-b\cdot d \\ & a-b\cdot c+d \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & a-b\cdot c+b\cdot d \\ a-b\cdot(c-d) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & a-b\cdot c-b\cdot d \\ & a-b\cdot c-d \end{tikzcd}$$

Problema 39 Decidan en cada caso cuál o cuáles de las fórmulas corresponden a la situación planteada.

a) Juan le lleva a su hijo 28 años de edad. Si llamamos J a la edad de Juan y H a la edad del hijo,

- $J+H=28$
- $J=28+H$
- $J=28-H$
- $H=28-J$
- $H=28+J$
- $J-H=28$

b) En cada auto de 4 puertas caben 4 personas. Si llamamos A al número de autos de 4 puertas y P a la cantidad de personas,

- $4\cdot 4\cdot P=A$
- $4^2\cdot P=A$
- $\frac{A}{P}=4$
- $4\cdot A=P$
- $P^4=A$

c) Dentro de 7 años la edad de Marina será el doble de la edad de su hija. Si llamamos M a la edad que Marina tiene hoy y H a la edad actual de su hija,

- $H+14=M$
- $2\cdot H+7=M$
- $H+7=2\cdot M$
- $H+7=2\cdot M+7$
- $H+7=2\cdot(M+7)$

d) Tengo 145 pesos y me falta ahorrar N pesos más para llegar a tener M pesos.

- $N+M=145$
- $N+145=M$
- $M-N=145$
- $M+145=N$

Problema 40 En cada caso escriban una fórmula que corresponda a la situación planteada.

a) Martín tiene 5 años más que el doble de la edad de su hijo.
   (i) Si la edad de Martín es M y la de su hijo es H,...
   (ii) Si la edad de Martín es M y el doble de la edad de su hijo es $\tilde{H}$,...

b) Las arañas tienen ocho patas y los escarabajos tienen seis. En una población de A arañas y E escarabajos el número total de patas es...

c) Un helado cuesta ocho pesos y un alfajor cuesta seis. Si compro H helados y A alfajores, en total me sale...

d) En un trabajo pagado de marzo a noviembre mi sueldo mensual es de N pesos. Para saber el verdadero sueldo distribuido en los 12 meses debo calcular,...

e) Si compro un producto por C pesos y lo vendo un 20 % más caro de lo que pagué por él mi ganancia es de...

Problema 41 Investiguen y respondan:

a) ¿Es verdad que la suma de 2 números naturales consecutivos es siempre múltiplo de 2?

b) ¿Es verdad que la suma de 3 números naturales consecutivos es siempre múltiplo de 3?

c) ¿Es verdad que la suma de 4 números naturales consecutivos es siempre múltiplo de 4?

d) ¿Es verdad que la suma de 5 números naturales consecutivos es siempre múltiplo de 5?

e) Después de investigar los puntos anteriores, propongan una generalización para este problema y conjeturen una posible solución.

4. Fracciones

Representaciones gráficas

Problema 42 Repartiendo

a) Tyn tenía 20 figuritas y las repartió entre sus amigos equitativamente, sin que sobrara ninguna. ¿Cuántos amigos puede tener Tyn? En cada caso, ¿cuántas figuritas le dio a cada uno? ¿Qué parte del total se llevó cada uno?

b) Chechu tiene 20 kilos de azúcar y quiere armar bolsitas iguales para vender. ¿De qué formas puede hacerlo? ¿Cuántas bolsitas y de qué peso es cada una? ¿Estás seguro de que no hay más? ¿Qué parte del total tiene cada una?

Problema 43 a) ¿Qué parte hay de cada tono de gris?

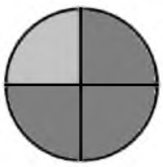


Figura 4.1

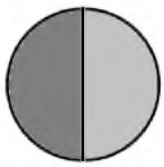


Figura 4.2

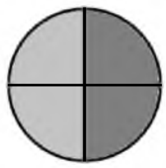


Figura 4.3

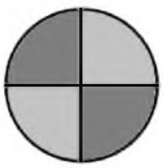


Figura 4.4

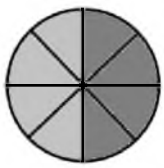


Figura 4.5

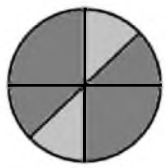


Figura 4.6

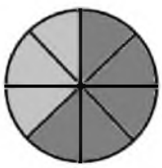


Figura 4.7

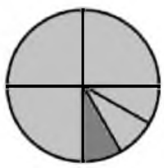


Figura 4.8

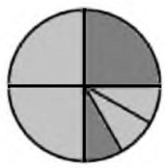


Figura 4.9

b) Más preguntas, acerca del punto anterior:

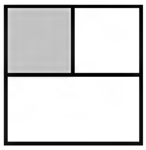


Figura 4.10

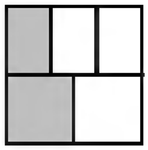


Figura 4.11

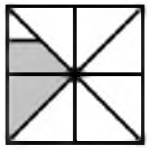


Figura 4.12

(i) Comparen las anotaciones que hicieron de las Figuras 4.1 y 4.6. ¿Qué conclusión pueden sacar?

(ii) Comparen las anotaciones que hicieron de las Figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5. ¿Qué conclusión pueden sacar al respecto? ¿Pueden hacer otras figuras, distintas a las dadas pero con la misma parte pintada? ¿Cuántas figuras con esta propiedad pueden hacer?

(iii) ¿Encontraron alguna dificultad en las Figuras 4.8, 4.9, 4.11 y 4.12? ¿Cuáles? ¿Cómo las resolvieron?

(iv) Si tuvieran que ayudar a alguien a darse cuenta de cuál es la parte pintada en las Figuras 4.8, 4.9, 4.11 y 4.12 ¿Cómo dibujarían dichas figuras?

Problema 44 Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$ expresan la misma cantidad

b) $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{5}$

c) $\frac{4}{6}$ es el doble de $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

e) La mitad de $\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{4}$

f) $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{4}{8}$

g) Fede y Juan tienen ambos sus ahorros. Fede se gasta $\frac{1}{4}$ del suyo y Juan $\frac{1}{2}$ del suyo. Entonces Juan gastó más dinero que Fede.

Problema 45 Para cada una de las figuras que van de la Figura 4.13 a la Figura 4.21 respondan:

a) ¿Qué parte está pintada de gris?

b) ¿Qué parte está pintada de negro?

c) ¿Qué parte está pintada?

d) ¿Qué parte no está pintada?

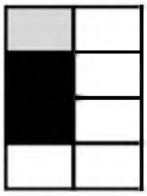


Figura 4.13

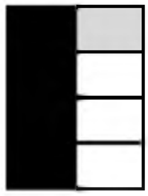


Figura 4.14

Figura 4.15

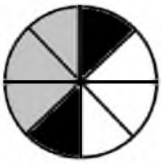


Figura 4.16

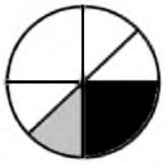


Figura 4.17

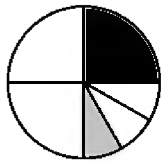


Figura 4.18

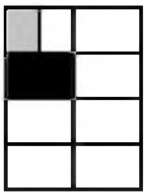


Figura 4.19

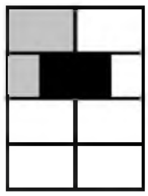


Figura 4.20

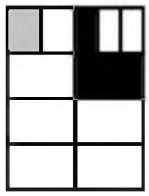


Figura 4.21

Problema 46 Indiquen qué fracción de cada figura está sombreada, entre las figuras B.11 y B.23, que encontrarán a partir de la página 124 de este cuadernillo.

Problema 47

a) Fran y Sebas se juntan todos los martes a comer pizza. La pizza viene dividida en ocho porciones. Fran come cuatro porciones y Sebas, tres porciones. Encuentren una manera de representar esta situación gráficamente ¿Qué parte de la pizza se comen cada martes? ¿Qué parte de la pizza sobra?

b) Un martes los chicos invitan también a comer a Martín, que come cuatro porciones de pizza ¿Alcanza una pizza para que coman los tres? ¿Cuántas pizzas tienen que pedir? ¿Cuántas pizzas se comen? ¿Cuánta pizza sobra? Si es necesario hacé gráficos que te ayuden a entender el problema.

c) ¿En el ítem anterior es lo mismo preguntar “¿Qué parte de lo pedido se comen?” que “¿Cuántas pizzas se comen?”? ¿Por qué?

d) Otro martes se juntan a comer Fran, Sebas, Martín y tres amigos más. Todos menos Fran y Martín comen tres porciones y Fran y Martín comen, como siempre, cuatro porciones. ¿Cuántas pizzas tienen que pedir? ¿Cuánta pizza sobra? ¿Qué cuenta podemos hacer para contestar lo anterior? ¿Hay alguna manera de resumir esta información?

e) En otra oportunidad se juntan Fran, Sebas y Martín. Fran lleva una pizza dividida en cuatro porciones y Martín, una dividida en ocho porciones. Los tres comen lo mismo de siempre. ¿Cómo podemos representar esta situación? ¿Cómo se pueden repartir las porciones? ¿Qué cuenta podemos hacer para determinar si es correcto el reparto propuesto?

f) Para el cumpleaños de Martín, él compra dos pizzas divididas en doce porciones iguales cada una. ¿Cómo se pueden repartir las porciones para que cada uno de los tres –Fran, Sebas y Martín– coma lo mismo de siempre? ¿Es posible hacer este reparto sin cortar más las pizzas? ¿Qué cuenta podemos hacer para determinar si es correcto el reparto? ¿Cuánto sobra?

g) Además de las pizzas, Fran, Sebas y Martín compran gaseosa. Si Fran se toma un tercio de una botella y Sebas toma la mitad de la misma botella, ¿quién toma más? Interpreten gráficamente el problema. ¿Qué parte del contenido de la botella toman entre los dos? ¿Qué parte del contenido de la botella queda para que tome Martín?

Distintos sentidos de fracción

Problema 48 Mirta tiene una receta para hacer 30 alfajorcitos de maicena:

- Manteca: 250 gramos
- Azúcar: 150 gramos
- Huevos: 2
- Maicena: 300 gramos
- Harina leudante: 150 gramos

a) Si quiere hacer 60 alfajorcitos de maicena, ¿cuánta manteca tendrá que utilizar?

b) Si quiere utilizar 1 sólo huevo, ¿cuántos alfajorcitos de maicena puede hacer? ¿Cuánto tiene que utilizar de maicena?

c) Si quiere utilizar los 225 gramos de azúcar que le quedan, ¿cuánto tiene que usar de harina leudante? ¿Cuántos alfajorcitos hace?

d) ¿Cuántos gramos de azúcar lleva cada alfajorcito?

e) ¿Cómo podemos expresar las proporciones que lleva de manteca, azúcar y harina leudante en relación a la cantidad de maicena?

Problema 49 Un paquete de fideos pesa $\frac{1}{4}$ de kilogramo. ¿Cuántos paquetes del mismo peso son necesarios para reunir 20 kg de fideos?

Problema 50 Una botella de jugo de naranja trae dos tercios de litro. Si un grupo de amigos compró 15 botellas, ¿cuántos litros de jugo compró?

Problema 51 ¿Cuántos segundos hay en $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ de un minuto? ¿Qué fracción del minuto representan estos segundos?

Problema 52 Los mares ocupan aproximadamente los siete décimos de la superficie terrestre. Si la superficie de la Tierra es de 510 millones de km^2, calculen la superficie que ocupan los mares y la que ocupan los continentes.

Problema 53 Juanma saca una copia reducida del plano de su casa. En el original su cuarto era un rectángulo de lados 6 y 9 centímetros e hizo una reducción a la mitad.

a) ¿Qué tamaño tiene en la reducción el rectángulo que representa su cuarto?

b) Si 1 cm del plano original representa 0,5 metros ¿Qué tamaño tiene el cuarto de Juanma?

Problema 54 Estadísticamente se sabe que en el lejano país de Kazán, cada 100 habitantes 72 tienen estudios secundarios. Tres conocidos lugares sobre la ruta principal de Kazán son: el pequeño pueblo de Azulandia al norte del país, el pueblito de Canalense, a 60km de Azulandia y la gran ciudad de Buentiro.

a) Si Azulandia tiene 300 habitantes, Canalense 5000 y Buentiro 72000; estadísticamente ¿cuántos habitantes con estudios secundarios tiene cada población?

b) Decidan si alguna de las siguientes fórmulas permite calcular el número de personas con estudios secundarios P, dada la cantidad de habitantes H.

- $P = 72H$
- $P = 100H + 116$

c) ¿Qué porcentaje del total de habitantes tiene estudios secundarios?

d) En Kazán, de la cantidad de personas con estudios secundarios, $\frac{1}{4}$ tienen estudios universitarios ¿cuántas personas en Azulandia tienen estudios universitarios?

e) ¿Qué porcentaje del total de habitantes de Kazán tiene estudios universitarios?

f) Debido a la tranquilidad que se vive en Azulandia, un día 300 personas con estudios secundarios se trasladan de Canalense a Azulandia. ¿Cuántos habitantes tiene ahora Azulandia? ¿Cuál es la proporción ahora de estudiantes con estudios secundarios en Azulandia?

Problema 55 Lucas está estudiando para dar un examen de matemática, para lo cual tiene que practicar resolviendo problemas de una guía. El primer día resolvió la mitad de los problemas, el segundo día resolvió un cuarto de lo que le quedaba y el tercer día resolvió un tercio de lo que le quedaba.

a) ¿Qué día resolvió más problemas? ¿Qué día menos?

b) ¿Qué parte de la guía le falta resolver?

c) Si la guía tiene 48 problemas, ¿cuántos problemas resolvió cada día?

d) ¿Qué porcentaje de la guía resolvió? ¿Qué porcentaje le falta resolver?

En todo momento, si les sirve de ayuda, realicen dibujos.

Problema 56 Matías está leyendo un libro. La primera noche lee un quinto del libro. ¿Qué fracción del libro le falta leer?

Problema 57 En la clase de Juani hay 30 estudiantes, un tercio son mujeres y el resto varones ¿Cuántas mujeres y cuántos varones hay?

Problema 58 Kari compró cuatro remeras, una pollera y una campera. Por la campera pagó \$246. La pollera costaba la tercera parte de lo que costaba la campera y cada remera, la mitad de lo que costaba la pollera. ¿Cuánto gastó en total?

Problema 59 El domingo la pileta de Naty estaba llena hasta $\frac{7}{8}$ de su capacidad. El lunes le sacaron 10000 litros y entonces quedó llena unas tres cuartas partes. ¿Cuántos litros de agua quedaron en la pileta de Naty?

Problema 60 En la clase de Jeuel hay $\frac{3}{5}$ de mujeres y el resto está conformado por hombres. Se sabe que $\frac{2}{3}$ de las mujeres y $\frac{1}{2}$ de los hombres estudian inglés.

a) ¿Qué fracción del total estudia inglés?

b) ¿Qué porcentaje de la clase no estudia inglés?

Problema 61 En la misma clase, $\frac{2}{3}$ de los estudiantes practican natación. Además, se sabe que $\frac{5}{9}$ de las mujeres practican dicho deporte.

a) ¿Qué porcentaje de las mujeres no practica natación?

b) ¿Qué proporción de hombres va a natación?

c) ¿Al menos qué porcentaje de los estudiantes hacen inglés y natación?

Problema 62 Daniel escala una montaña. El primer día asciende $\frac{3}{8}$ de la altura, el segundo día, $\frac{1}{2}$ de lo que queda. Si le faltan por escalar 1500 m, ¿qué altura tiene la montaña?

Problema 63 Utilizando los recursos que crean convenientes:

a) Escriban una lista de 5 números mayores que 2 y menores que 7, ordenada de menor a mayor.

b) Escriban una lista de 5 fracciones mayores que 2 y menores que 7, ordenada de menor a mayor.

c) Escriban una lista de 5 números mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.

d) Escriban una lista de 12 números mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.

e) Escriban una lista de 5 fracciones mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.

f) Escriban una lista de 12 fracciones mayores que 0 y menores que 1, ordenada de menor a mayor.

g) Escriban una lista de 5 números mayores que $\frac{1}{3}$ y menores que $\frac{2}{3}$, ordenada de menor a mayor.

h) Escriban una lista de 5 fracciones mayores que $\frac{1}{3}$ y menores que $\frac{2}{3}$, ordenada de menor a mayor.

Problema 64 Investiguen y respondan:

a) ¿Existen dos números que multiplicados den por resultado 6? ¿Existen otros dos? ¿Se puede escribir una lista completa de todas las parejas de números que multiplicados den 6? ¿Se pueden describir de alguna manera todas esas parejas?

b) ¿Existen dos números positivos que sumados den por resultado $\frac{2}{3}$? ¿Existen otros dos? ¿Se puede escribir una lista completa de todas las parejas de números que sumados den $\frac{2}{3}$? ¿Se pueden describir de alguna manera todas esas parejas?

Problema 65 Resuelvan los siguientes problemas:

a) Escriban una lista de 10 números mayores que 518 y menores que 519, ordenada de menor a mayor.

b) Escriban una lista de 10 fracciones mayores que 518 y menores que 519, ordenada de menor a mayor.

c) Escriban una lista de 5 números mayores que $\frac{17}{53}$ y menores que $\frac{18}{53}$, ordenada de menor a mayor.

d) Escriban una lista de 5 fracciones mayores que $\frac{17}{53}$ y menores que $\frac{18}{53}$, ordenada de menor a mayor.

e) ¿Cómo podemos hacer en los casos anteriores para hacer listas más largas?

f) Describan un procedimiento que permita resolver el problema si, en vez de pedirse 5 fracciones, se piden 1000 fracciones.

Problema 66 Investiguen y respondan

a) ¿Existen dos números que multiplicados den por resultado $\frac{1}{6}$? ¿Existen otros dos? ¿Se puede escribir una lista completa de todas las parejas de números que multiplicados den $\frac{1}{6}$? ¿Se pueden describir de alguna manera todas esas parejas?

b) ¿Existen dos números que multiplicados y divididos den el mismo resultado? ¿Existe más de una solución? ¿Se puede escribir una lista completa con todas las soluciones? ¿Se pueden describir de alguna manera todas las soluciones?

c) ¿Existen dos números que sumados, multiplicados y divididos den el mismo resultado? ¿Existe más de una solución? ¿Se puede escribir una lista completa con todas las soluciones? ¿Se pueden describir de alguna manera todas las soluciones?

d) ¿Existen dos números que sumados, restados, multiplicados y divididos den el mismo resultado? ¿Existe más de una solución? ¿Se puede escribir una lista completa con todas las soluciones? ¿Se pueden describir de alguna manera todas las soluciones?

Problema 67 Den razones por la que podrían funcionar o no funcionar los siguientes "métodos" para sumar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

b) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{2(a+c)}{b+d}$

c) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{2(a\cdot d+c\cdot b)}{b+d}$

d) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{17a+31c}{b+d}$

e) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{d+c}$

f) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$

g) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=a+2b+2d+c$

h) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

i) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b\cdot d}$

j) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(\frac{1}{b}+\frac{1}{d})\frac{(a\cdot d+c\cdot b)}{b+d}$

Recta numérica

Problema 68 Cada una de las rectas de la Figura 4.22 representa un tramo de ruta. Los números son carteles indicadores de la distancia al inicio de la ruta. Decidan, en cada caso, si la escala está bien respetada. En caso de que no lo esté, indiquen cuál sería la ubicación correcta para los carteles[1] .

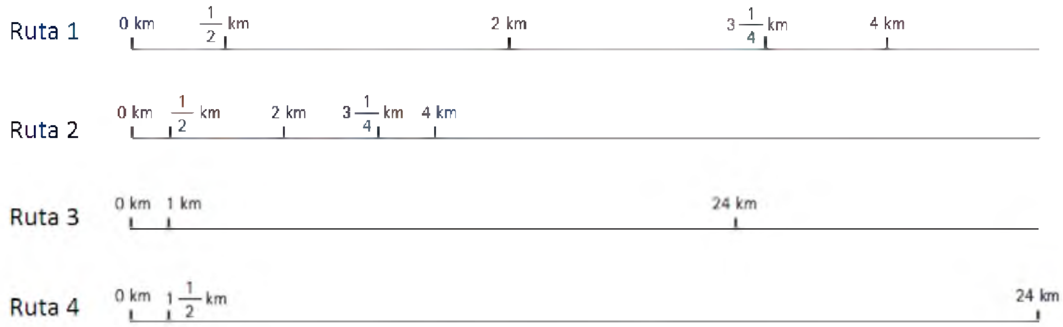


Figura 4.22

Problema 69 Para resolver este problema tendrán que decidir varias veces si algunos segmentos señalados en una recta son iguales o distintos. Podemos considerar que son iguales si se puede trasladar uno hacia el otro marcando un papel, como muestra la Figura 4.23. En dicha figura, se demuestra trasladando un papel marcado que los segmentos AB y CD miden lo mismo.

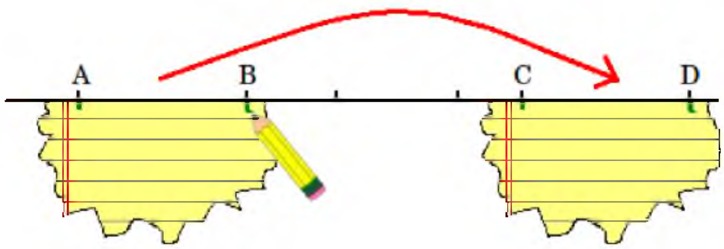


Figura 4.23

Indiquen en cada caso recta de la Figura 4.24 qué número representan los puntos nombrados con las letras A, B o C.

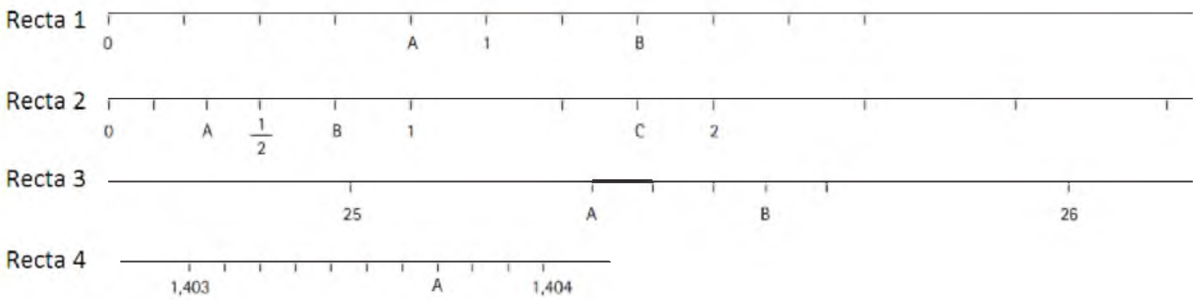


Figura 4.24

[1]Los problemas de esta sección están adaptados de [48].

Problema 70 En cada uno de los siguientes casos elijan una escala conveniente para poder representar los dos o tres números en una recta numérica.

a) $\frac{1}{6}; \frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{4}; \frac{7}{3}$

c) $\frac{15}{5}; \frac{15}{7}$

d) 1,2 1,58 2,01

e) 2,5 3,4 4,6

Problema 71 Observen los números ubicados en cada recta de la Figura 4.25 y determinen la ubicación de los números 0 y 1.

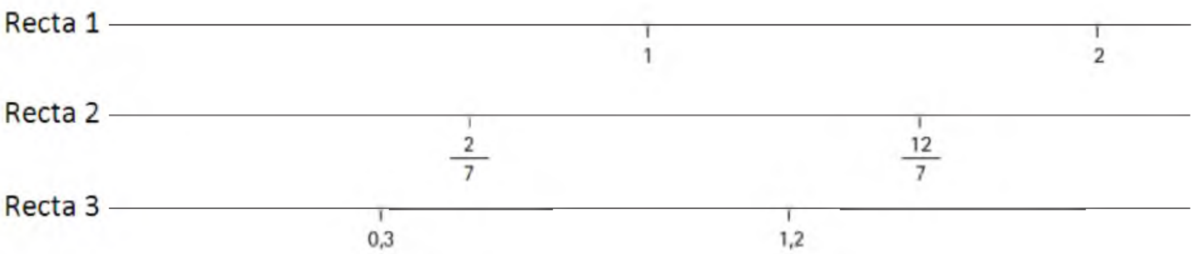


Figura 4.25

Porcentaje, ofertas y toma de decisiones

Problema 72 Pablo se quiere comprar un videojuego. Si lo paga en efectivo, le descuentan un 20 % del precio de lista. Si lo paga en 12 cuotas le recargan un 10 % sobre el precio de lista. Si en efectivo le sale 1200 pesos, ¿de cuánto será cada cuota?

Problema 73 Fui a comprar a una librería un libro de matemática. El vendedor me dijo que por estar en oferta me hacen el 15 % de descuento, pero que han de cargarme el 6 % de IVA. ¿Qué me conviene más, que primero me hagan el descuento y luego me carguen el IVA o que primero me carguen el IVA y después me hagan el descuento?

Problema 74 En un supermercado hacen los días miércoles el 10 % de descuento en todos los artículos, más el 5 % para jubilados. Eso significa que se descuenta el 5 % de lo que queda tras haber descontado el 10 %. Los días jueves el supermercado ofrece el 15 % de descuento sobre todos sus productos, para todo el público.

Ramón es jubilado. ¿Le conviene ir a comprar el miércoles, el jueves o le da lo mismo?

Problema 75 Un supermercado tiene la oferta que se muestra en el siguiente cartel:

60 % DE DESCUENTO EN LA SEGUNDA UNIDAD EN TODOS LOS PRODUCTOS DE ALMACÉN.

Un dulce de leche de 500 g cuesta \$18,25. El de la misma marca, pero de 250 g cuesta \$12,50. ¿Que conviene comprar: un dulce de leche grande o dos chicos?

Problema 76 La Figura 4.26 está tomada de un catálogo de ofertas de un supermercado.

a) Expliquen en palabras en qué consiste la oferta.

b) Revisen las cuentas que hicieron los encargados del marketing del supermercado, para ver si los precios son acordes a las reglas de la oferta.

Problema 77 La Figura 4.27 es un documento histórico en el que se ven cuatro productos de una oferta de supermercado, con sus precios. Dos de ellos tienen también el correspondiente precio con IVA.

a) Si no conocen en qué porcentaje se ve recargado un precio mediante el IVA, dedúzcanlo de los datos disponibles. En caso de qué sí conozcan dicho porcentaje, verifiquen que en el caso de los datos disponibles ha sido correctamente calculado.
b) Propongan una fórmula que para cada precio P permite calcular el correspondiente precio recargado con el IVA y utilicen la fórmula para calcular los precios incrementados de los dos últimos productos.
c) Averigüen los precios actuales de los mismos productos y calculen el porcentaje de aumento que sufrieron desde la publicación del aviso hasta hoy.

Figura 4.26: Oferta de Milanesas de soja

Figura 4.27: Precios con y sin IVA

Problema 78 Una farmacia realiza un descuento del 30 % en sus medicamentos por pago en efectivo. Además, atiende beneficiarios de una obra social que realiza un 40 % de descuento[2].

a) Suponiendo que en los casos en los que correspondan ambos descuentos la farmacia primero realiza el descuento de la obra social y luego sobre este último valor, la farmacia hace el descuento por pago en efectivo; decidan cuánto paga un cliente por un medicamento cuyo precio de lista es de $200 en cada uno de los siguientes casos:
   (i) Paga en efectivo y no es beneficiario de la obra social.
   (ii) Paga con tarjeta y no es beneficiario de la obra social.
   (iii) Paga con tarjeta y es beneficiario de la obra social.

[2] Problema aportado por el Prof. Martín Chacón.

(iv) Paga efectivo y es beneficiario de la obra social.

b) ¿Qué porcentaje total de descuento se realiza sobre el precio de lista en cada uno de los casos anteriores?

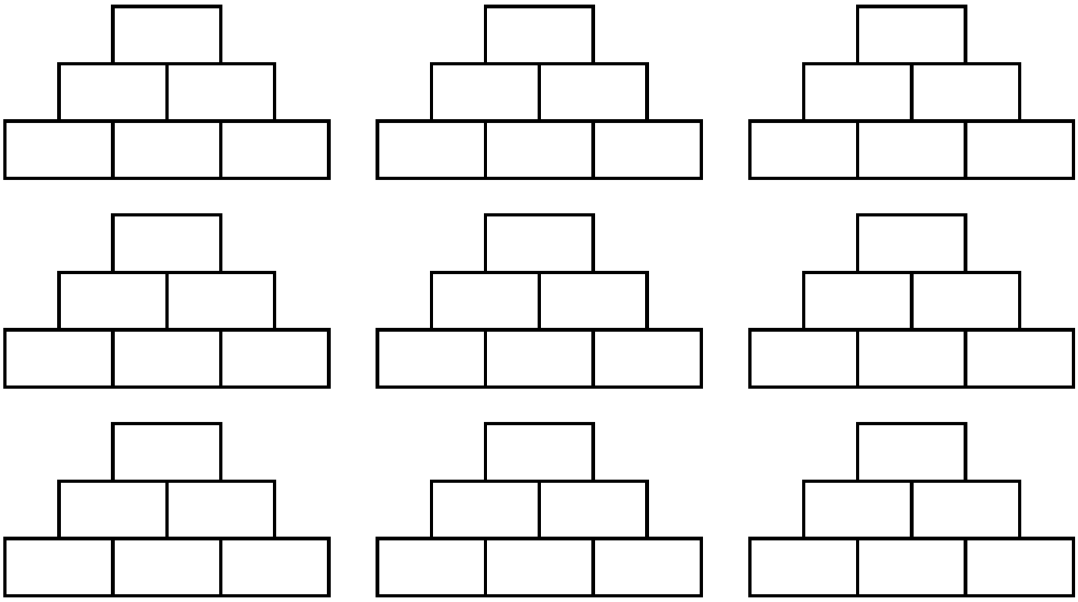
c) El porcentaje de descuento por pago en efectivo lo absorbe la farmacia (es decir, la farmacia “gana menos”). El porcentaje de descuento por obra social lo absorbe la obra social (es decir, ésta debe devolver el valor a la farmacia). Decidan si es lo mismo para el cliente, para la farmacia y para la obra social si se hace primero el descuento por pago en efectivo y luego (sobre el nuevo precio) el descuento por obra social o al revés, para un medicamento de $1000.

d) Un cliente, que es beneficiario de la obra social, compró un medicamento que cuesta $500 y pagó en efectivo. El empleado de la farmacia le hizo un descuento sobre los $500 del 70 %. ¿Es correcto lo que hizo el empleado? ¿Quién salió beneficiado, el cliente, la obra social, la farmacia? ¿Y quién perjudicado?

e) Al último cliente del día se le cobró $500. Decidan cuánto puede ser el precio de lista si el cliente paga como en cada uno de los cuatro casos del ítem a).

5. Modelización

Problema 79 Pirámide de números. (Para trabajar en forma individual). Las siguientes figuras representan pirámides formadas por ladrillos apilados. Las pirámides se deben completar de manera que cada ladrillo que la compone tenga un número.



a) Completen una de las pirámides de la figura.

b) Completen otra para que los seis números sumen al menos 1000.

c) Completen otra para que los seis números sumen a lo sumo 100.

Después de completar las pirámides anteriores a manera de ejemplo, se introduce una regla del juego que valdrá para los problemas con pirámides, de aquí en adelante:

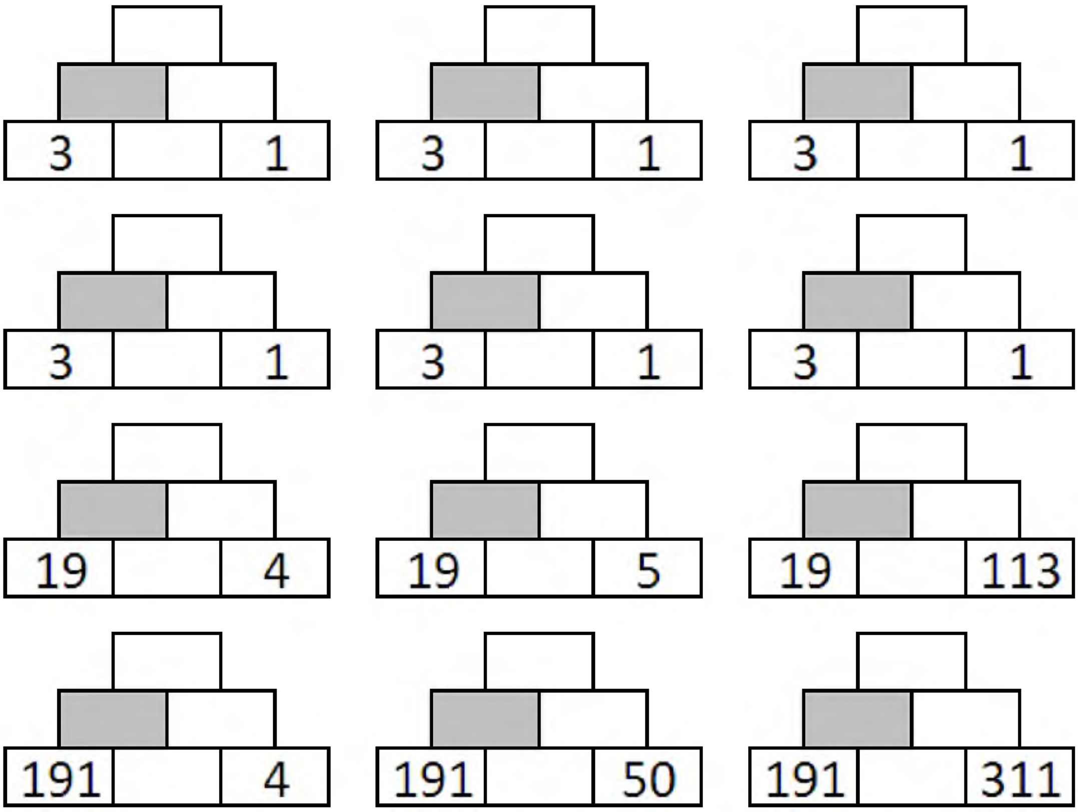
Regla de la suma: El número de cada ladrillo es la suma de los números de los dos ladrillos en los que está apoyado.

d) ¿Alguna de las pirámides que completaron cumple la Regla de la suma?

e) Completen algunas de las pirámides para que cumplan con la Regla de la suma. Háganlo de manera que al menos tres pirámides tengan todos números diferentes entre sí.

f) Intercambien con un compañero o compañera y observen las pirámides que completó para ver si cumplen la Regla de la suma.

Problema 80 Ahora vamos a trabajar con estas pirámides que ya tienen un par de valores asignados en los ladrillos de la primera fila[1]. Completen la pirámide para que cumpla con la Regla de la suma. Damos dibujados muchos esquemas de pirámides porque las cosas nunca tienen por que salir en el primer intento. Ustedes pueden dibujar más esquemas. Los ladrillos sombreados se mencionarán recién a partir del ítem c). Por ahora son como cualquier otro ladrillo.



a) ¿Se puede elegir cualquiera de los ladrillos vacíos para completar la pirámide?

b) ¿Cuántas soluciones diferentes pueden hallar?

c) ¿Pueden lograr que el ladrillo sombreado valga 1001? ¿Cómo lo harían?

d) ¿Pueden lograr que el ladrillo superior valga 2020? ¿Cómo lo harían?

e) ¿Cuántas soluciones pueden encontrar de manera que el ladrillo superior tenga valor 2020?

f) ¿Cuántas soluciones pueden encontrar de manera que el ladrillo superior tenga valor 2011?

g) ¿Pueden encontrar una solución para que el ladrillo superior tenga valor $3,14$?

h) ¿Pueden encontrar una solución para que el ladrillo superior tenga valor π?

[1] Llamaremos **primera fila** a la fila de abajo y contaremos hacia arriba, como si fuesen los pisos de un edificio.

Saliendo del universo numérico.

i) ¿Pueden encontrar una solución para que el ladrillo superior tenga valor $2n + 8$?

j) ¿Pueden encontrar una solución para que el ladrillo superior tenga valor n?

k) ¿Pueden encontrar una solución para que el ladrillo superior tenga valor $a + b$?

l) Vuelvan a responder las preguntas anteriores para una pirámide con un piso más, como las que aparecen en la Figura 5.1.

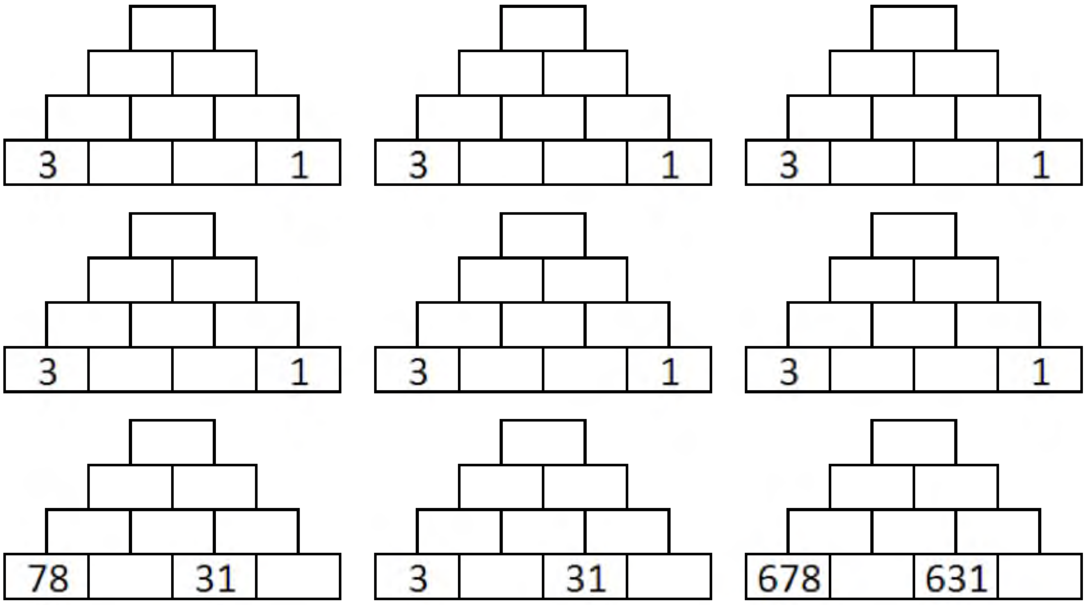


Figura 5.1

Problema 81 La Figura 5.2 muestra dos pirámides vacías, una de tres pisos y otra de cuatro.

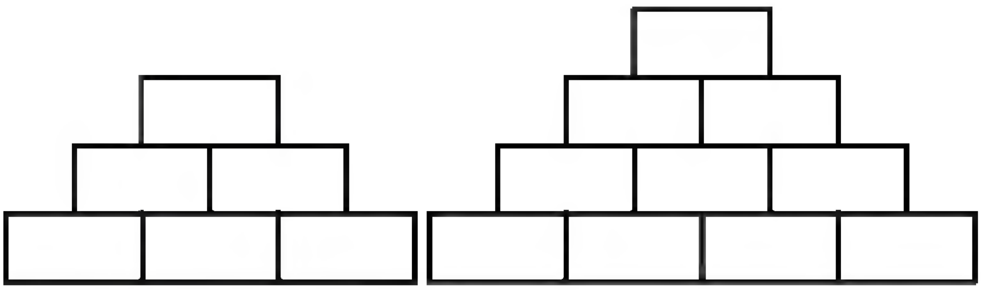


Figura 5.2

a) ¿Qué números **no** enteros se pueden poner en los ladrillos de la primera fila de cada pirámide de la Figura 5.2 para que –siguiendo la Regla de la suma– los números de las siguientes filas sean todos números enteros.

b) ¿Qué números **no** enteros se pueden poner en los ladrillos de la primera fila de cada pirámide de la Figura 5.2 para que –siguiendo la Regla de la suma– los números de la segunda fila no sean enteros, pero los números de las siguientes filas sí lo sean.

c) ¿Cómo pueden adaptar las soluciones a las dos preguntas anteriores para aplicarlas a una pirámide de 5 pisos? ¿Y a una de 6 pisos?

Problema 82 Las siguientes preguntas también se refieren a las pirámides vacías de la Figura 5.2 y seguimos asumiendo que debe cumplirse la Regla de la suma.

a) Completen la primera fila, con al menos un número positivo y al menos un número negativo, pero de manera que los números de todas las demás filas sean positivos.

b) Completen la primera fila, con al menos un número positivo y al menos un número negativo, pero de manera que los números de todas las demás filas sean negativos.

c) Completen la primera fila, con al menos un número positivo y al menos un número negativo logrando que la segunda fila también tenga al menos un número positivo y al menos un número negativo, pero de manera que los números de todas las demás filas sean positivos[2].

Problema 83 Un **cuadrado mágico** es un cuadrado formado por cuadrados más pequeños (como los que se ven en la Figura 5.3) que cumple las siguientes propiedades: cada casilla es un número entero distinto y la suma de los números de cada fila, cada columna y las dos diagonales es la misma.

El más famoso es el de 3x3 casillas, con los dígitos consecutivos de 1 a 9 y suma constante 15, que ya conocían los chinos hace más de 1500 años y que se muestra en la siguiente figura (¿hay otras formas de completarlo con los mismos nueve dígitos?):

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 5.3: Cuadrado mágico.

Pero no es necesario que los dígitos sean consecutivos, para que el cuadrado sea mágico. Basta con que sus números sean distintos (usualmente enteros positivos) y con que tenga las sumas de líneas horizontales, verticales y diagonales iguales. Completen los siguientes cuadrados, rellenando las casillas vacías con números, para que sean mágicos. Hay tres ejemplares de cada uno para que puedan experimentar. Si necesitan más pueden hacerse nuevas copias en cualquier hoja.

	6	
4		
11		5

	6	
4		
11		5

	6	
4		
11		5

	6	
4		
11		8

	6	
4		
11		8

	6	
4		
11		8

[2]En el caso de la pirámide de tres pisos “todas las demás filas” es en realidad un ladrillo.

	6	
4		
		5

	6	
4		
		5

	6	
4		
		5

a) ¿Cuántas soluciones diferentes pueden hallar de cada uno?

b) ¿Qué métodos usaron para construirlas?

c) ¿Pueden lograr que la suma constante de cada cuadrado sea 2020? ¿Cómo lo harían?

d) ¿Pueden lograr que el ladrillo superior izquierdo valga 2020? ¿Cómo lo harían?

Saliendo del universo numérico

e) ¿Pueden lograr que el ladrillo superior izquierdo valga $a + 1$? ¿Cómo lo harían?

f) ¿Pueden lograr que la suma constante de cada cuadrado sea $a + 20$? ¿Cómo lo harían?

Problema 84 Completen los siguientes cuadrados rellenando las casillas vacías con números para que sean mágicos. Hay tres ejemplares de cada uno para que puedan experimentar. Si necesitan más pueden hacer nuevas copias en una hoja.

	6	
4		
11		

	6	
4		
11		

	6	
4		
11		

4	6	
11		

4	6	
11		

4	6	
11		

	C	
A		
B		

	C	
A		
B		

	C	
A		
B		

A	C	
B		

A	C	
B		

A	C	
B		

a) ¿Cuántas soluciones diferentes pueden hallar para cada uno?

b) ¿Pueden lograr que la suma constante de cada cuadrado sea 2020? ¿Cómo lo harían?

c) ¿Pueden lograr que el ladrillo superior izquierdo valga 2020? ¿Cómo lo harían?

d) ¿Pueden lograr que el ladrillo superior izquierdo valga $a + 1$? ¿Cómo lo harían?

e) ¿Pueden lograr que la suma constante de cada cuadrado sea $a + 20$? ¿Cómo lo harían?

6. Interpretación y análisis de datos

Problema 85 Esta primera actividad se desarrollará con un material específico aportado por tu docente. Consistirá en simular una investigación acerca de una colección de objetos. Las distintas consignas de la actividad serán dadas en la clase por tu docente y es por eso que no figuran escritas. Nos referiremos a ella como **La actividad de la bolsa de sorpresas**.

Problema 86 Un grupo de biólogos realizó 8 pescas en un lago, para estudiar la población. Dejaron en un papel, medio arrugado y con olor a pescado, las siguientes anotaciones:

Primera pesca: 1 trucha pequeña, 1 trucha grande, 4 carpas pequeñas, 4 carpas grandes, 7 salmones pequeños, 4 salmones grandes.

Segunda pesca: 3 truchas grandes, 3 carpas pequeñas, 6 carpas grandes, 6 salmones pequeños, 3 salmones grandes.

Tercera pesca: 3 truchas pequeñas, 1 trucha grande, 5 carpas grandes, 8 salmones pequeños, 4 salmones grandes.

Cuarta pesca: 2 truchas pequeñas, 5 carpas pequeñas, 4 carpas grandes, 10 salmones pequeños, 2 salmones grandes.

Quinta pesca: 5 truchas pequeñas, 2 truchas grandes, 1 carpa pequeña, 6 carpas grandes, 5 salmones pequeños, 4 salmones grandes.

Sexta pesca: 4 truchas pequeñas, 1 trucha grande, 3 carpas pequeñas, 5 carpas grandes, 7 salmones pequeños, 3 salmones grandes.

Séptima pesca: 3 truchas pequeñas, 5 carpas pequeñas, 3 carpas grandes, 8 salmones pequeños, 5 salmones grandes.

Octava pesca: 4 truchas pequeñas, 2 truchas grandes, 1 carpa pequeña, 5 carpas grandes, 8 salmones pequeños, 4 salmones grandes.

a) Vuelquen la información anterior en la siguiente tabla:

	Trucha	Carpa	Salmón
Grande			
Pequeño			

b) Entre los peces del lago, ¿cuál es estadísticamente el porcentaje de truchas?

c) Entre los peces del lago, ¿cuál es el porcentaje de truchas chicas?

d) Entre las truchas del lago, ¿cuál es el porcentaje de truchas chicas?

e) ¿Qué proporción de truchas hay en el lago, en relación al resto de los peces?

f) ¿Qué incidencia tuvo *San Ictícola de los Peces* en la riqueza de la pesca?

Problema 87 La siguiente lista de datos resume los resultados de varias pescas realizadas para estudiar la población de un lago.

Rojos y grandes: 29	Rojos y chicos: 9
Azules y medianos: 2	Verdes y medianos: 6
Azules y chicos: 11	Azules y grandes: 19
Verdes y grandes: 6	Rojos y medianos: 19

a) ¿Qué proporción de peces rojos grandes hay en el lago?

b) ¿Qué porcentaje aproximado de peces verdes hay en el lago?

c) ¿Qué porcentaje de peces del lago no son medianos?

d) ¿Alcanza la información para saber cuántos peces rojos grandes hay en el lago?

e) ¿Se puede asegurar que en el lago no hay peces verdes chicos?¿Por qué?

f) La Figura 6.1 da información sobre el porcentaje de peces azules en el lago. Complétenla con la información que falta.

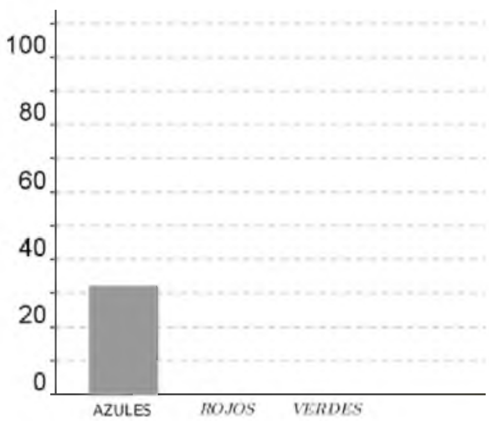


Figura 6.1

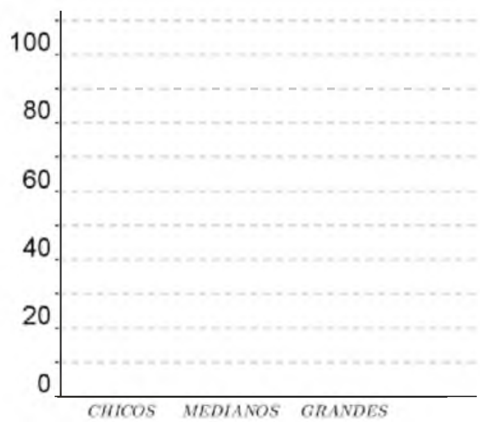


Figura 6.2

g) Completen el gráfico de la Figura 6.2.

h) ¿Se les ocurre alguna manera de presentar toda la información en un único gráfico?

Problema 88 La Figura B.36 de la página 127 muestra los datos obtenidos por Santi después de una cierta cantidad de pescas.

a) ¿Cuántos peces grises lisos se han pescado?

b) ¿Qué proporción de peces lisos hay en el lago?

c) ¿Qué porcentaje de peces blancos hay en el lago?

d) ¿Qué proporción de peces rayados hay entre los grises?

e) ¿Qué porcentaje de peces no son amarillos?

f) Si pescamos un pez y es verde ¿Qué probabilidad tenemos de que tenga puntos?

g) Si pescamos un pez y tiene puntos ¿De qué color es más probable que sea?

h) ¿Cuántos peces hay en el lago dónde se ha realizado este experimento?

Problema 89 Gastón fue otro día al mismo lago que Santi y obtuvo los datos que se ven en la Tabla 6.1:

	Lisos	Rayados	Con puntos	Totales
Grises	19	4	2	
Blancos	4	7	3	
Amarillos	3	0	0	
Verdes	24	11	5	
Totales				

Tabla 6.1

a) ¿Obtuvo Gastón las mismas proporciones que Santi?

b) ¿Qué tantas diferencias tienen? ¿Qué tantas coincidencias?

c) ¿Qué podemos hacer para mejorar la precisión de los datos?

d) ¿Cómo podemos medir la *distancia* entre los datos obtenidos por Gastón y Santi?

Problema 90 Después de pescar en el mismo lago que Gastón y Santi, llegó Maxi con sus datos, que están organizados en la Tabla 6.2

	Lisos	Rayados	Con puntos	Totales
Grises	9	2	1	
Blancos	2	4	1	
Amarillos	1	1	1	
Verdes	13	5	2	
Totales				

Tabla 6.2

a) ¿Cuáles de las tres muestras, la de Gastón, la de Santi o la de Maxi es más confiable?

b) A partir de todos estos datos ¿Cómo podemos obtener mejores aproximaciones?

c) ¿Cómo podemos medir que tan lejos estuvo cada pescador de la “mejor aproximación”?

d) ¿Se te ocurre alguna manera de mejorar aún más esta aproximación?

Problema 91 Queremos analizar cómo se distribuyen ciertos atributos: estatura, talle de calzado, género y edad, dentro de la población de Moreno. ¿Serán todas las estaturas igual de probables? ¿Habrá algún talle de calzado que se use más que otro? ¿Qué tan probable será encontrar personas de más de 100 años?

a) Para responder estas preguntas vamos a contar con la colaboración de todos ustedes. Cada uno deberá encuestar al menos a 10 personas y preguntarles (y anotar de alguna forma): género, estatura, talle de calzado y edad. No es necesario anotar el nombre de la persona, pero sí debe estar claro qué atributos corresponden a una misma persona.

   Algunas preguntas para esta etapa:

   - ¿Habrá que tener algún tipo de cuidado con la elección de estas personas? ¿Por qué?
   - ¿Sería una muestra relevante tomarle la encuesta a 10 alumnos del mismo grado de un colegio? ¿Por qué?
   - ¿De qué manera registrarán los datos?

b) Una vez que tengas relevados los datos:

   (i) ¿Se te ocurre alguna manera de sintetizar la información que obtuviste?

   (ii) ¿Podemos disponer todos estos datos de alguna manera que nos permita visualizar mejor la información que hemos hallado?

   (iii) ¿Todos los talles de zapatos son igualmente usados por la gente? ¿Hay algún talle que sea más popular?

   (iv) ¿Hay alguna persona que calce más de 46? ¿Y alguna que calce menos de 32?

   (v) ¿Qué pasa con las preguntas anteriores si diferenciamos el análisis entre mujeres y hombres?

   (vi) De acuerdo a lo observado en el ítem anterior, ¿están relacionadas las variables de género y talle de calzado? ¿coincide esto con tu intuición al respecto?

   (vii) ¿Te animás a volcar de una manera gráfica el análisis hecho?

   (viii) ¿Qué pasa respecto a las estaturas? ¿Se puede hacer el mismo análisis que hicimos para talles de calzado?

   (ix) ¿Hay alguna relación entre las estaturas y los talles de calzado? ¿Cómo se te ocurre validar tu conclusión?

   (x) ¿Y una relación entre las estaturas y las edades?

   (xi) ¿Te parece tu muestra significativa para elaborar conclusiones al respecto?

   (xii) ¿Es esta comisión del TRP una muestra representativa de la población encuestada?

c) Durante el trabajo posterior en grupos de 3 o 4:

   (i) ¿Hay algún cuidado que todos hayan tenido a la hora de seleccionar la gente para ser encuestada?

   (ii) ¿Cuáles de las maneras de anotar los datos les parece mejor? ¿Por qué?

   (iii) Discutan las preguntas planteadas individualmente en el Problema 91b)

(iv) ¿Qué conclusiones podemos sacar de lo discutido anteriormente? ¿Qué tipo de distribución tienen las variables consideradas en nuestro análisis? ¿Cuáles de estas variables estan relacionadas y cuáles no? Propongan alguna forma de cuantificar la relación entre variables.

(v) ¿Hay alguna regularidad en los datos relevados?

(vi) ¿Qué variables están más relacionadas estatura-talle de calzado o género-talle de calzado? ¿Se les ocurre como podemos hacer para medir esto?

7. Visualización de la información

Problema 92 Las siguientes figuras muestran dos indicadores sobre transporte público urbano: accesibilidad (Figura 7.1) y cobertura (Figura 7.2), en siete aglomerados urbanos con poblaciones que varían entre 60.000 y 800.000 habitantes.

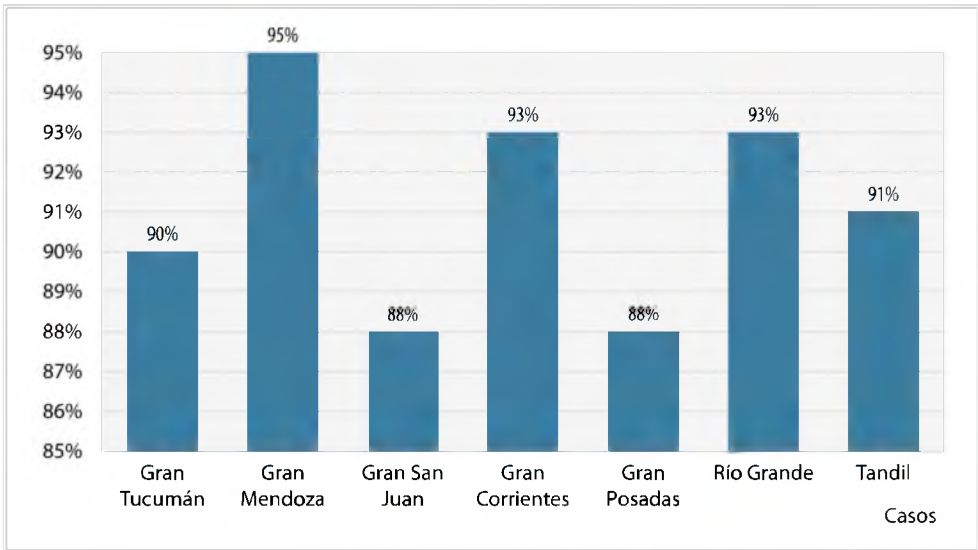


Figura 7.1: Accesibilidad

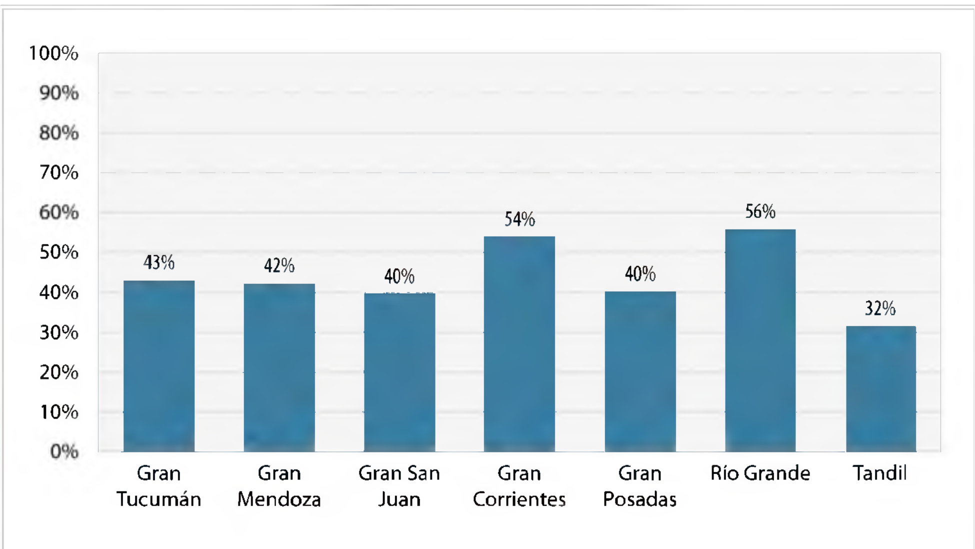


Figura 7.2: Cobertura

El indicador de accesibilidad de la población al transporte público es la relación entre la población que se encuentra residiendo a una distancia “accesible” al transporte urbano y la población total del aglomerado. Se define como “accesible” a una distancia de 500 metros a cada lado de una línea de transporte público urbano.

El indicador de cobertura de transporte público (Ic) es la relación entre área servida y área total del aglomerado. Se define como “área servida” al área del aglomerado que se encuentra a una distancia de 500 metros a cada lado de una línea de transporte público.

a) Observando los gráficos, indiquen un aglomerado que tenga el triple de accesibilidad que otro.
b) ¿Qué aglomerado tiene menos de un 60 % de cobertura comparado con otro?
c) Uno de los gráficos de barras tiene una característica que aumenta la probabilidad de que sea mal interpretado. ¿A qué característica se refiere?
d) ¿Qué conclusiones se pueden obtener sobre estos aglomerados a partir de la comparación de los gráficos de los dos indicadores, accesibilidad y cobertura?

Los datos y gráficos de este problema fueron extraídos de la página del *Atlas de Indicadores de Desarrollo Territoriales* (http://atlasid.planificacion.gob.ar/) desarrollado por la *Subsecretaría de Planificación Territorial de la Inversión Pública* (http://www.planificacion.gob.ar/).

Problema 93 Los datos correspondientes a la distribución del ingreso en tres décadas sucesivas de un país imaginario se representan con gráficos circulares, ver Figura 7.3. Se trata de los porcentajes de los ingresos que tienen el cuarto más alto de la población (gris más oscuro), el segundo cuarto (segundo gris más oscuro), el tercer cuarto (segundo gris más claro) y el último cuarto (gris más claro). Se trata de un país con muy poca desigualdad, como no hay ninguno en la actualidad.

Los mismos datos se muestran en la Figura 7.4, representados mediante gráficos de barras.

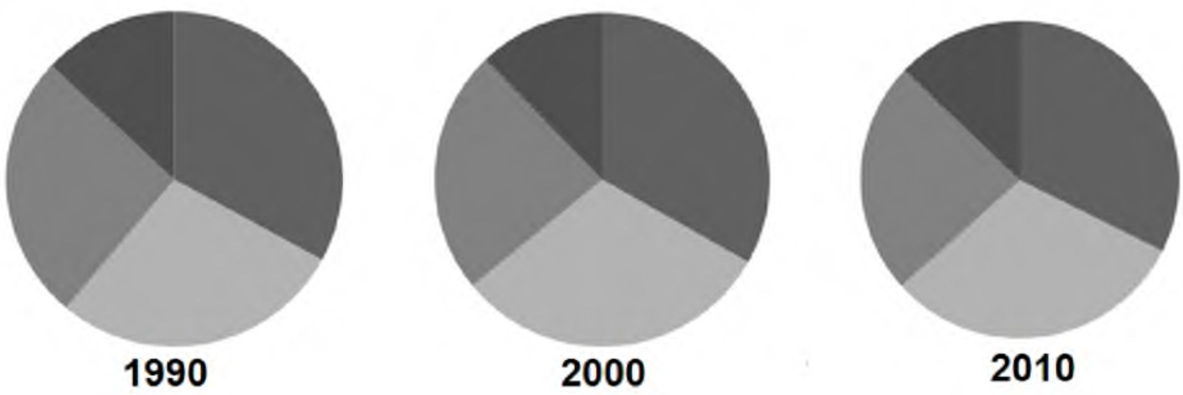


Figura 7.3: Gráficos circulares

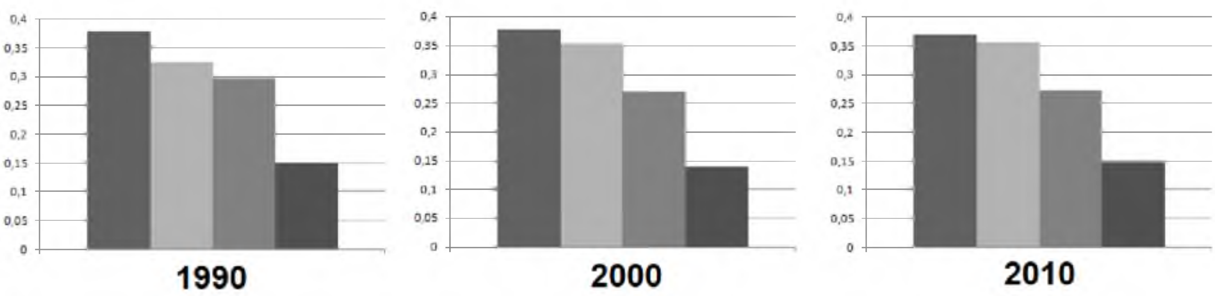


Figura 7.4: Gráficos de barras

a) Observando los gráficos circulares decidan si el cuarto de más bajos ingresos ha mejorado su participación en el reparto de los ingresos en las décadas relevadas.

b) Observando los gráficos circulares decidan cómo ha sido la evolución de los otros tres cuartos a lo largo de las tres décadas relevadas.

c) Respondan las dos preguntas anteriores utilizando los gráficos de barras.

d) Escriban un texto describiendo ventajas y desventajas de cada tipo de gráfico para representar este tipo de información.

e) Analicen si estos gráficos indican si se hizo más parejo el reparto de la riqueza o no. Piensen cómo diseñarían una cuenta que dé un índice de distribución del ingreso a partir de los datos de los cuatro sectores de la población.

Problema 94 La Figura 7.5 y la Figura 7.6 son gráficos de mosaico que representan un par de variables cuantitativas. Están referidos a los sobrevivientes y víctimas del hundimiento del HMS Titanic que se hundió en aguas del Atlántico Norte el 15 de abril de 1912. Se sabe que 1316 pasajeros se embarcaron el 10 de abril de 1912 desde el puerto de Southampton.

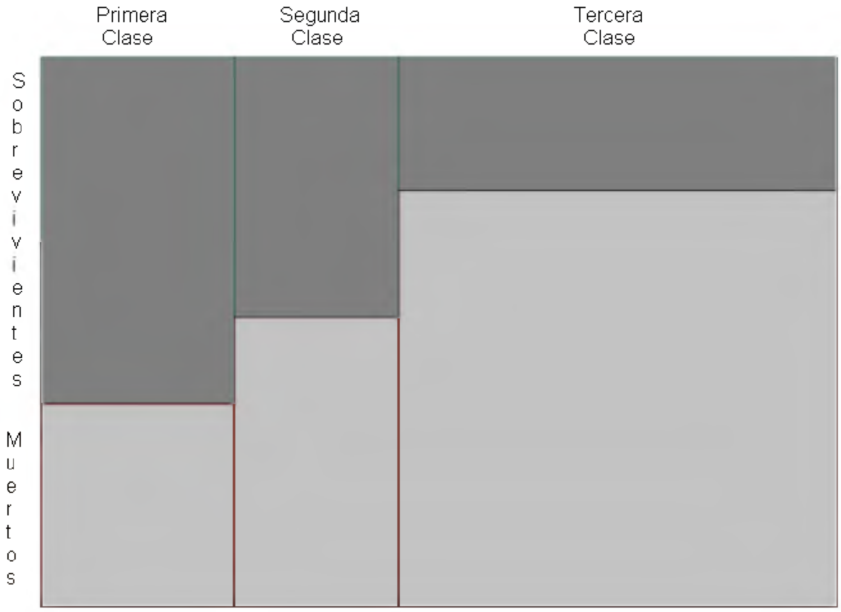


Figura 7.5: Sobrevivientes por clase

a) ¿Qué representa la dimensión horizontal del gráfico?

b) ¿Qué representa la dimensión vertical del gráfico?

c) Estimen cuántas pasajeras viajaban en el barco. ¿Qué era mayor: el total de pasajeras en el barco o el total de personas en primera clase?

d) ¿De qué clase hubo más sobrevivientes?

e) Estimen cuántas víctimas fatales hubo entre los pasajeros que viajaban en tercera clase.

f) Estimen una cota inferior y una cota superior para la cantidad de hombres sobrevivientes de primera clase.

g) Se sabe que el barco contaba con una tripulación de 885 personas. De las 23 mujeres de la tripulación sobrevivieron 20. No tuvieron la misma suerte los hombres que tuvieron 670 víctimas fatales entre la tripulación incluyendo al capitán Edward John Smith. Adapten los dos gráficos para incluir los datos de la tripulación.

h) Propongan una forma de reunir ambos gráficos en un único gráfico que contenga la información de los dos. ¿Es posible hacerlo con la información que proporcionan los gráficos originales o es necesaria información adicional?

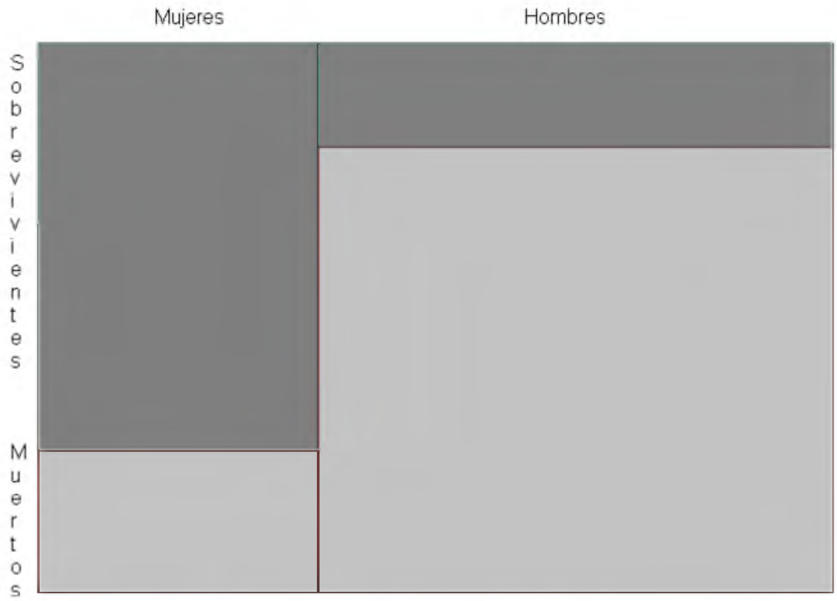


Figura 7.6: Sobrevivientes por género

Problema 95 En un artículo sobre la estructura urbana de ciudades[1] se desarrolló a partir del sistema libre de mapas `www.openstreetmaps.org` y el uso de software libre, una aplicación para generar *histogramas polares* que revelan información sobre las orientaciones de las calles de las ciudades a partir de los datos brindados por los mapas. La Figura 7.7 muestra los histogramas polares de Buenos Aires, San Pablo y Toronto, cuyos mapas se muestras en las Figuras 7.8, 7.9, 7.10, respectivamente.

a) Escriban una descripción de no más de 200 palabras sobre la información que brinda un histograma polar sobre las calles de una ciudad.

b) Los histogramas polares están dados en cualquier orden. Identifiquen cada histograma polar con su respectiva ciudad.

c) Boceten un histograma polar del vecindario de la UNM (ver mapa en Figura 7.11).

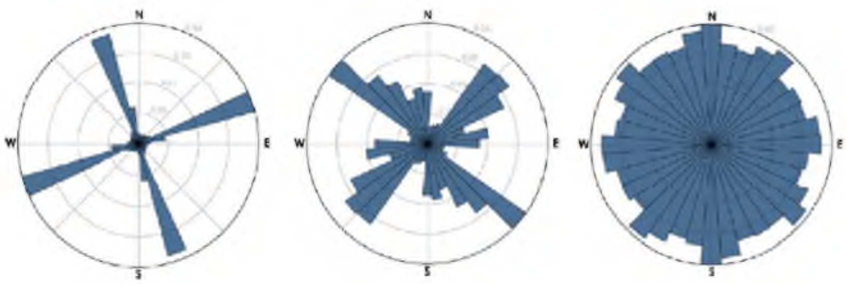


Figura 7.7: Histograma Polar

[1] Geoff Boeing, Urban Spatial Order: Street Network Orientation, Configuration, and Entropy

Figura 7.8: Buenos Aires

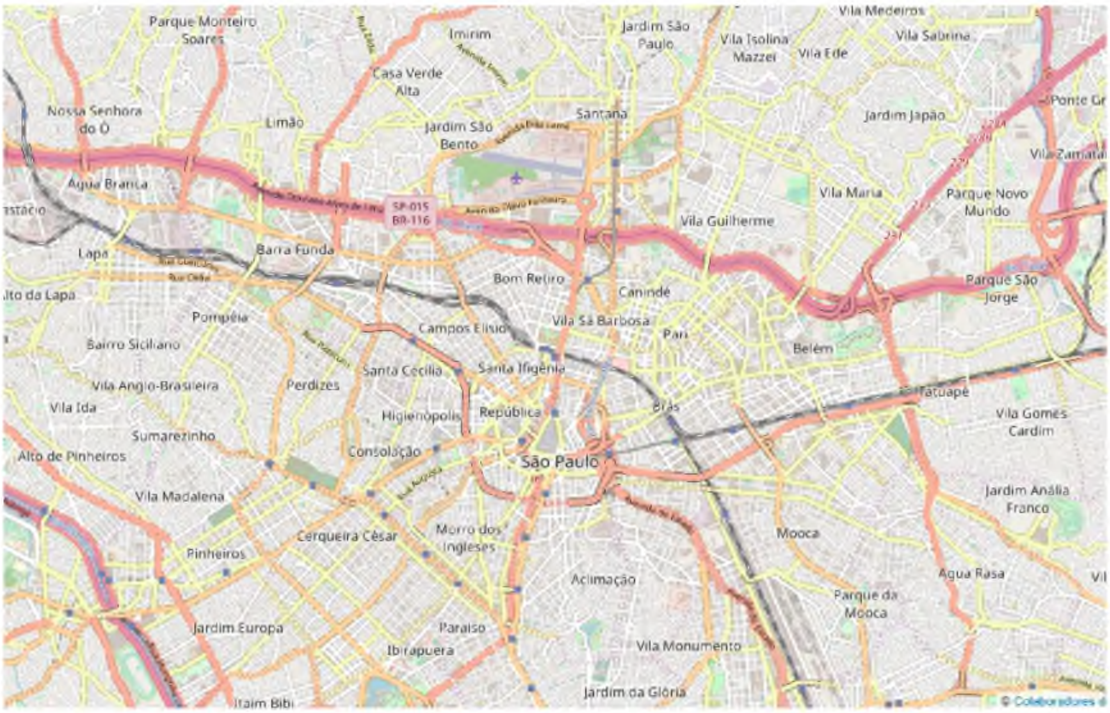


Figura 7.9: San Pablo

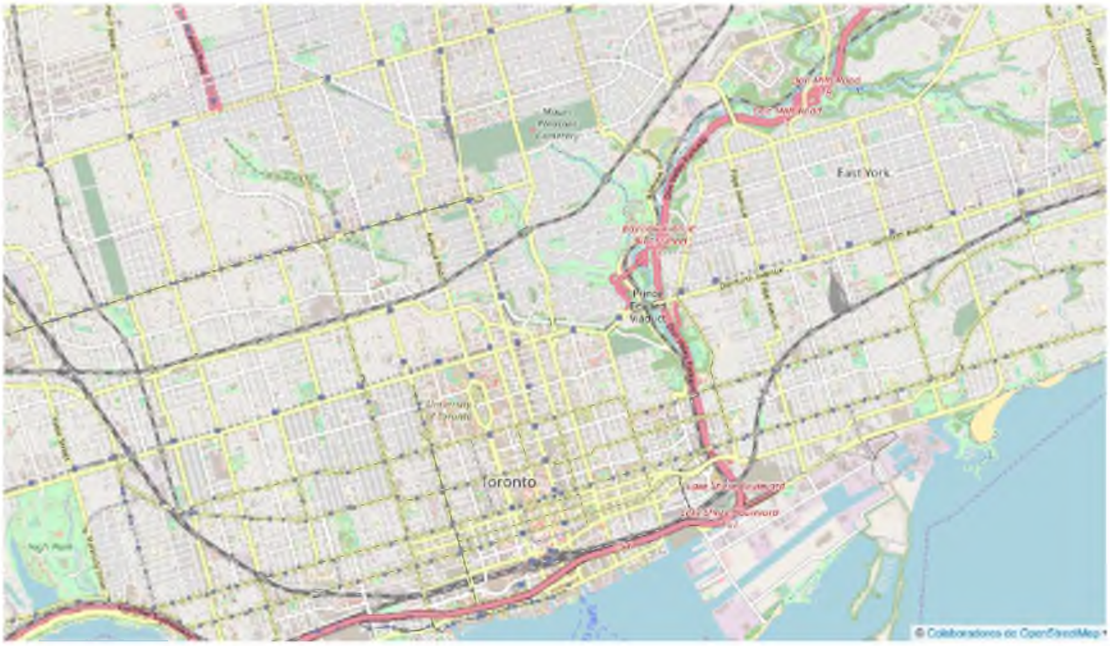


Figura 7.10: Toronto

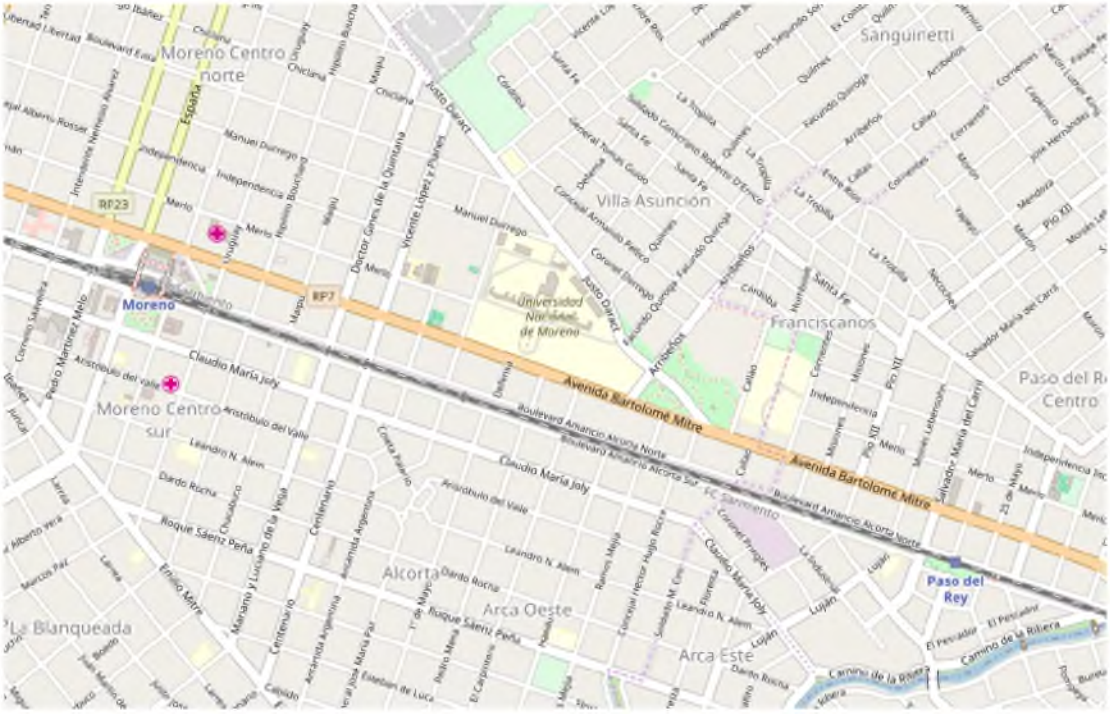


Figura 7.11: Moreno

Problema 96 Las figuras a continuación muestran las pirámides poblacionales de Sudamérica y de Europa Occidental en el año 2011. Mírenlas con atención.

a) En la Figura 7.12, aproximadamente ¿cuántos habitantes de 16 años hay? ¿y de 65? ¿y en la Figura 7.13?

b) ¿Para qué edades hay más de 2 millones de habitantes hombres en la Figura 7.12? ¿y en la Figura 7.13?

Figura 7.12: Continente 1, 2011.

Figura 7.13: Continente 2, 2011.

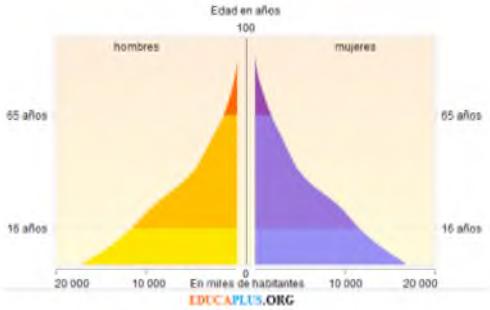


Figura 7.14: ¿A qué continente corresponde?

c) ¿Hay alguna diferencia en la Figura 7.12 en el comportamiento de la población según sean hombres o mujeres? ¿y en la Figura 7.13? ¿Cómo hicieron para concluir esto?

d) ¿Cuál de las dos pirámides les parece que corresponde a Europa Occidental y cuál a Sudamérica? ¿Por qué llegaron a esta conclusión?

e) ¿Cómo pueden explicar la forma de la pirámide en Figura 7.12? ¿y la pirámide de la Figura 7.13?

f) La Figura 7.14 es una pirámide poblacional de 2011 correspondiente a algún continente. ¿A cuál les parece que puede corresponder? ¿Por qué?

g) La Figura 7.14 ¿se parece más a la Figura 7.12 o a la Figura 7.13?

h) ¿Qué diferencias observan entre las Figuras 7.12 y 7.14? ¿Cómo pueden interpretar estas diferencias?

i) La esperanza de vida son los años que un recién nacido puede esperar vivir si los patrones de mortalidad por edades imperantes en el momento de su nacimiento siguieran siendo los mismos a lo largo de toda su vida. Mirando las Figuras 7.12, 7.13 y 7.14 ¿En dónde les parece que la *esperanza de vida* es más alta? ¿Cómo hicieron para sacar esta conclusión? ¿Se animan a hacer alguna conjetura de cuántos años es la *esperanza de vida* en cada lugar?

j) Las siguientes seis figuras corresponden cada una a la pirámide poblacional de Europa Occidental de cada uno de los seis siguientes años: 1950, 1960, 1970, 1980, 1990 y 2000, ¿Se animan a ordenarlas cronológicamente? ¿Por qué les parece que es ése el orden?

k) ¿Se animan a hacer un dibujo de cómo será la pirámide poblacional de Europa Occidental en el año 2025? ¿y en el año 2050? ¿Qué sucesos podrían contribuir a que se modifiquen dichas pirámides poblacionales? Comparen sus dibujos con los de sus compañeros.

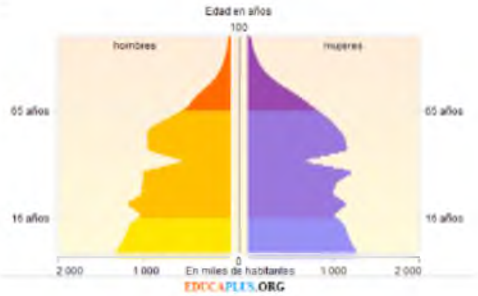


Figura 7.15

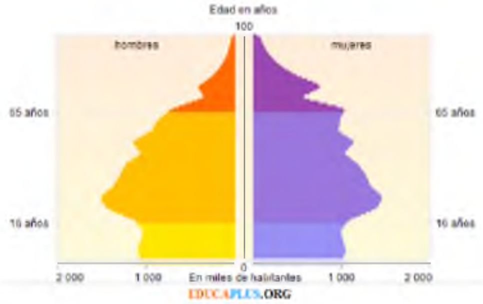


Figura 7.16

Figura 7.17

Figura 7.18

Figura 7.19

Figura 7.20

8. Tablas y gráficos

Problema 97 En este problema jugaremos a descubrir el funcionamiento de un artefacto imaginario, al que llamaremos **caja negra**. La caja negra funciona transformando un número que le ingresamos (Entrada) en otro número que nos devuelve (Salida), mediante un procedimiento que tiene programado. La caja se llama “negra” porque ese procedimiento es oscuro para nosotros: no sabemos en qué consiste. La única alternativa que tenemos para intentar averiguarlo es hacer el *experimento* de proponerle a la caja distintos números y analizar cuidadosamente qué números la caja nos devuelve. El desafío consiste en descubrir cómo funcionan las distintas cajas negras. En esta actividad tendrán que interactuar con el/la docente que hará de moderador/a.

Para debatir una vez que hayan investigado el funcionamiento de todas las cajas negras:

a) ¿Qué diferencias observaron entre las distintas cajas negras? ¿Todas las cajas negras aceptaban como Entrada cualquier clase de números? ¿Pueden conseguir que cada caja negra devuelva cualquier número que se propongan?

b) ¿Qué obtenemos si primero transformamos un número mediante la caja negra 1 y luego ingresamos el resultado en la caja negra 2? ¿Dará lo mismo si lo hacemos en el otro orden? ¿Qué pasará en general para cualquier par de cajas negras?

c) ¿Podremos deshacer el proceso que realiza una caja negra? Analicen todos los casos. Si pudieron describir cómo actúa una caja negra, describan también cómo actuará la caja negra *deshacedora*. ¿Existirá siempre una caja negra deshacedora?

Problema 98 a) Relean el enunciado y recuerden el Problema 24, de la página 17. Imaginen una caja negra que admite como entrada el número de mesas y devuelve la cantidad máxima de personas que se pueden sentar alrededor de ellas. ¿Cómo sería la fórmula que describe el funcionamiento de esa caja?

b) Escriban, si es posible, una fórmula que permita describir la acción de cada una de las cajas negras del Problema 97.

c) En el punto b) del Problema 97 se pidió investigar acerca de la transformación que provocaban dos cajas negras, utilizadas una después de la otra (relean ese enunciado). Usando las fórmulas conseguidas en la parte b) de este problema, intenten producir una fórmula que describa la acción de dos cajas seguidas. Verifiquen que las fórmulas halladas coincidan con los funcionamientos de las cajas que pudieron describir antes.

d) También en el Problema 97 se pidió investigar para cuáles cajas negras existía una caja *deshacedora*. Relean las conclusiones obtenidas. ¿Es posible encontrar una fórmula que describa el funcionamiento de cada caja deshacedora?

Problema 99 a) ¿Pueden encontrar alguna relación entre los gráficos de la Figura 8.1 y las cajas negras del Problema 97 que venimos estudiando?

b) Construyan los gráficos correspondientes a las cajas negras faltantes.

c) Investiguen condiciones que debe tener un gráfico que proviene de una caja negra, para que exista la caja negra deshacedora.

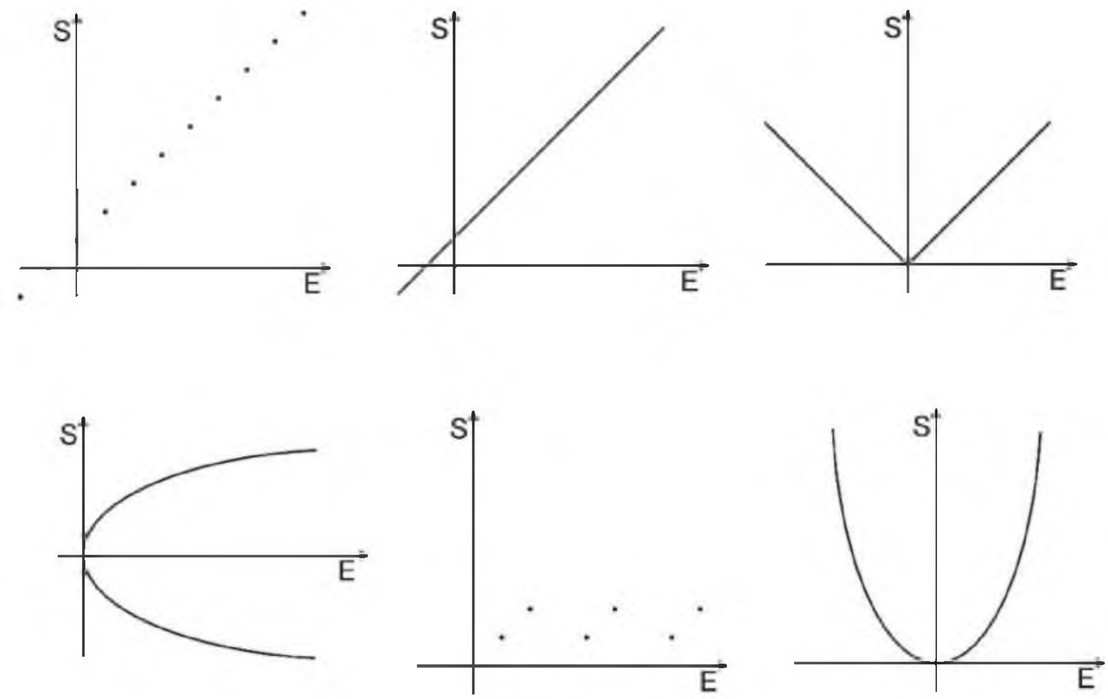


Figura 8.1

Problema 100 Relean el enunciado del Problema 23 de la página 17 y las soluciones que obtuvieron en clase. Para resolver ese problema tuvieron que escribir una fórmula. Organicen la información como si se tratara de una caja negra, respondiendo las siguientes preguntas:

a) ¿Qué representa el número que ingresa en la caja?

b) ¿Qué representa el número que sale?

c) ¿Se puede representar la información en una tabla?

d) ¿Se puede representar en un gráfico?

e) ¿Existe la caja *deshacedora*? ¿Qué representaría el número que ingresa en la caja deshacedora? ¿Y el que sale?

Problema 101 La siguiente tabla muestra algunos resultados que se obtuvieron al utilizar una caja negra:

Entra	Sale
1	10
2	13
3	16
7	28
10	37

a) ¿Qué devuelve la caja negra si entra el número 3?

b) Si de la caja negra salió el número 10 ¿Qué número entró?

c) Si entró el número 1 y cuando salió el valor transformado lo ingresamos otra vez en la caja, ¿qué número sale?

d) Para cada una de las siguientes fórmulas decidan si describe correctamente el funcionamiento de la caja negra o no y expliquen en cada caso por qué:

- $n \to n^2 + 9$
- $n \to 3n + 7$

e) Expliquen por qué uno de estos gráficos (Figuras 8.2 y 8.3) describe el funcionamiento de la caja negra y expliquen por qué el otro no.

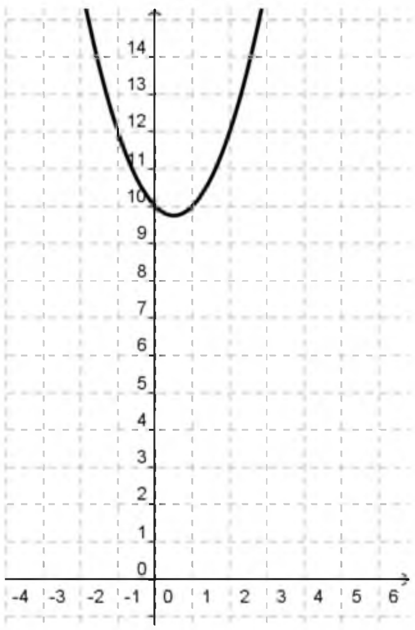


Figura 8.2

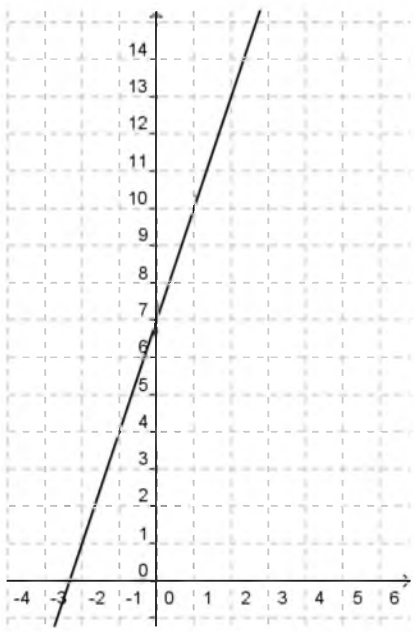


Figura 8.3

f) Decidan a cuál de estas tablas corresponde el gráfico que consideraron incorrecto en la respuesta anterior, explicando por qué y explicando también por qué la otra es incorrecta:

Entra	Sale
-1	12
0	10
1	10
2	12

Entra	Sale
0	10
1	11
2	12
3	16

g) Decidan, para cada una de las cajas negras representadas en el ítem anterior, si tienen o no caja negra deshacedora. En caso de que sí, propongan una y en caso de que no, argumenten por qué.

Problema 102 Lean las preguntas que vienen a continuación e interpreten los gráficos.

a) El primer gráfico de la Figura 8.4 muestra los precios mes a mes del hinojo, la lechuga y la palta.

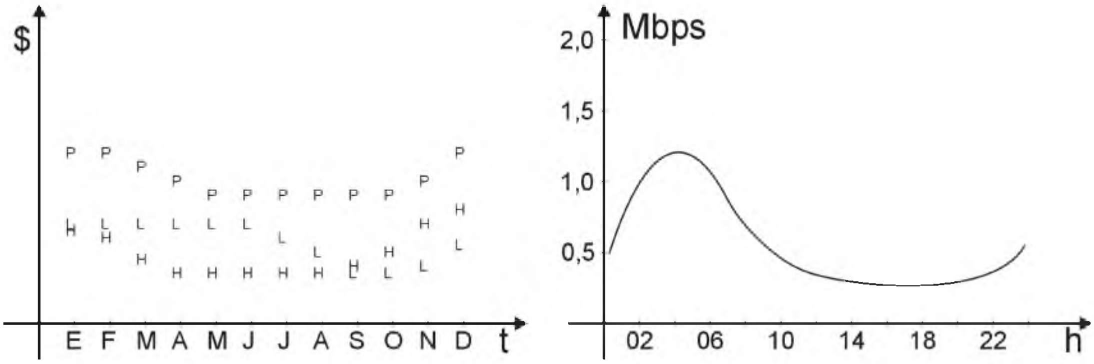


Figura 8.4

(i) ¿Cuál es el mes en que sale más barato hacer una ensalada con los tres ingredientes?

(ii) ¿En que meses conviene hacerla si queremos gastar lo menos posible y hemos de usar sólo dos ingredientes? Den la respuesta para todas las ensaladas posibles de dos ingredientes.

b) Sabiendo que el segundo gráfico de la Figura 8.4 representa la velocidad de descarga de Internet en función de la hora, ¿a qué hora nos conviene descargar datos de Internet?

Problema 103 El gráfico de la Figura 8.5 muestra la producción de unidades por mes de una fábrica de botellas, durante los meses de enero a junio.

a) ¿En qué mes se fabricaron más botellas?

b) ¿En qué mes se fabricaron menos?

c) ¿Hubo dos meses en los que se haya fabricado la misma cantidad de botellas?

d) Supongamos que una caja negra funciona recibiendo el número de mes y devolviendo la cantidad de botellas fabricadas ese mes, de manera que se obtiene este gráfico. ¿Puede existir una caja deshacedora? ¿Por qué? ¿Qué información se supone que nos daría?

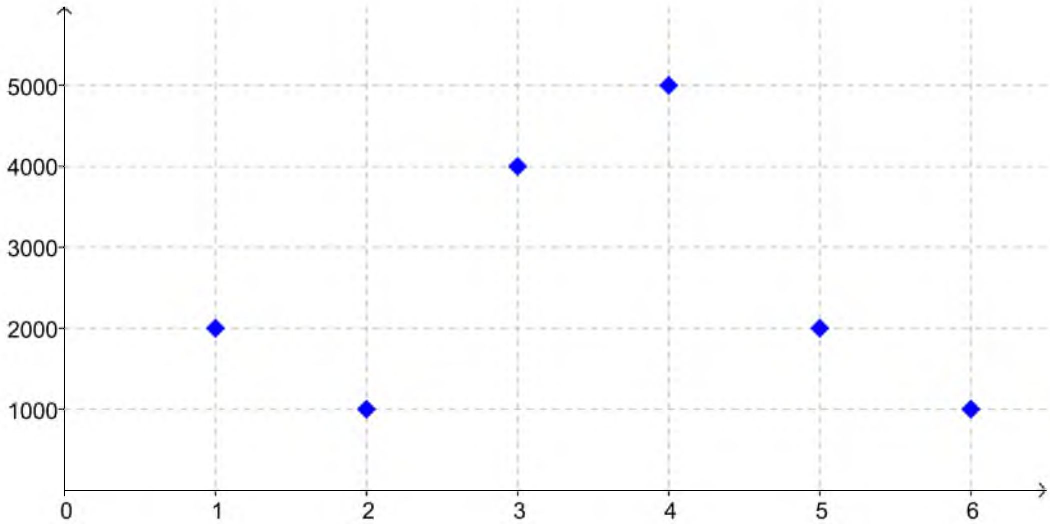


Figura 8.5

Problema 104 La siguiente tabla describe la tarifa de un estacionamiento.

Tiempo	Precio en pesos (por hora)
Las dos primeras horas	22
Las tres horas siguientes	19
A partir de la sexta hora	15

(La hora no se fracciona)

a) ¿Cuánto hay que pagar por estacionar 3 horas con 40 minutos?

b) ¿Cuánto hay que pagar por estacionar exactamente 6 horas?

c) ¿Es posible que dos clientes paguen lo mismo siendo distintos los tiempos de estacionamiento?

d) Hugo pagó $82. ¿Cuánto tiempo dejó su auto en el estacionamiento? ¿Hay una única respuesta posible?

Problema 105 Grafiquen la velocidad en función del tiempo de un automóvil desde el momento de su partida si:

a)
- En los primeros 8 minutos su velocidad creció proporcionalmente al tiempo.
- A los 8 minutos alcanzó la velocidad máxima permitida de 60 km/h.
- Marcha a velocidad constante los siguientes 30 minutos.
- Durante 4 minutos disminuye su velocidad en forma proporcional al tiempo hasta alcanzar la velocidad de 20 km/h.
- En los siguientes 6 minutos aumenta su velocidad en forma proporcional al tiempo hasta alcanzar la velocidad de 80 km/h.
- Durante los 12 minutos siguientes marcha a velocidad constante.

Intercambien sus gráficos con otros que hayan construido sus compañeros. ¿Son todos iguales?, ¿por qué?

b)
- Aumenta su velocidad los primeros 20 minutos.
- Sigue a velocidad constante los siguientes 8 minutos.
- Frena en 1 minuto.
- Aumenta su velocidad en los siguientes 5 minutos.
- Disminuye su velocidad en los siguientes 3 minutos y frena.
- Nunca se pasó de la velocidad máxima de 120 km/h.

Intercambien sus gráficos con otros que hayan construido sus compañeros. ¿Son todos iguales?, ¿por qué?

c)
- Minuto 1: 70 km/h.
- Minuto 8: 60 km/h.
- Minuto 9: 70 km/h.
- Minuto 13: 120 km/h.

- Minuto 30: 0 km/h.

Intercambien sus gráficos con otros que hayan construido sus compañeros. ¿Son todos iguales? ¿por qué?

Problema 106 Los gráficos de la Figura 8.6 corresponden a dos cajas negras, a las que podemos llamar $CN1$ y $CN2$.

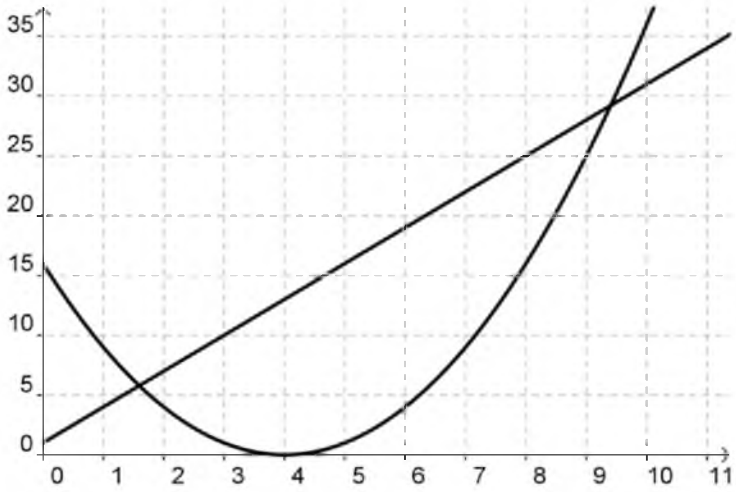


Figura 8.6

a) ¿Existe algún número al que ambas cajas negras transformen en el mismo número? ¿Existe más de un número con esa propiedad? ¿Existen más de dos? Indiquen, interpretando el gráfico, de qué número o números se trata y en qué números se transforman por acción de las cajas negras.

b) Sabiendo ahora que la caja $CN1$ responde a la fórmula $y = (x-4)^2$ y que la caja $CN2$ responde a la fórmula $y = 3x + 1$, propongan un procedimiento de cálculo que les permita verificar y dar con mayor precisión la respuesta al ítem anterior.

Problema 107

a) Lean las siguientes frases que significan lo mismo:

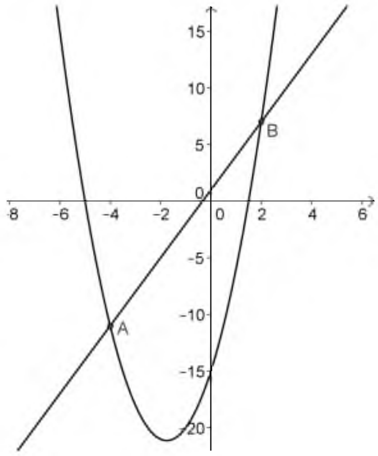
> **FRASE 1**: Las fórmulas $y = 2x^2 + 7x - 15$ e $y = 3x + 1$ transforman a cierto x_0 en un mismo número y_0.

> **FRASE 2**: La Caja Negra 1 tiene fórmula $y = 2x^2 + 7x - 15$. La Caja Negra 2 tiene fórmula $y = 3x + 1$. Cuando cierto número x_0 entra a cualquiera de la dos cajas, ambas devuelven el número y_0.

> **FRASE 3**: Si $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$ y $g(x) = 3x + 1$, entonces existe un número x_0 para el cual $f(x_0) = g(x_0)$.

> **FRASE 4**: Los gráficos de la figura corresponden a las funciones $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$ y $g(x) = 3x + 1$. Las coordenadas (x_0, y_0) pueden corresponder a cualquiera de los dos puntos A y B señalados en los gráficos.

> **FRASE 5**: El par (x_0, y_0) está en la solución del sistema de ecuaciones
> $$\begin{cases} y = 2x^2 + 7x - 15 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$



b) Encuentren las coordenadas de A y B.

c) Resuelvan el sistema $\begin{cases} y = 3x^2 + 5x - 7 \\ y = -7x + 8 \end{cases}$

d) Encuentren los puntos de intersección entre los gráficos de $f(x) = -3x^2 + 5x - 9$ y $g(x) = 2x + 9$.

e) Encuentren todos los números x que se transforman en lo mismo al ser ingresados a las siguientes cajas negras:

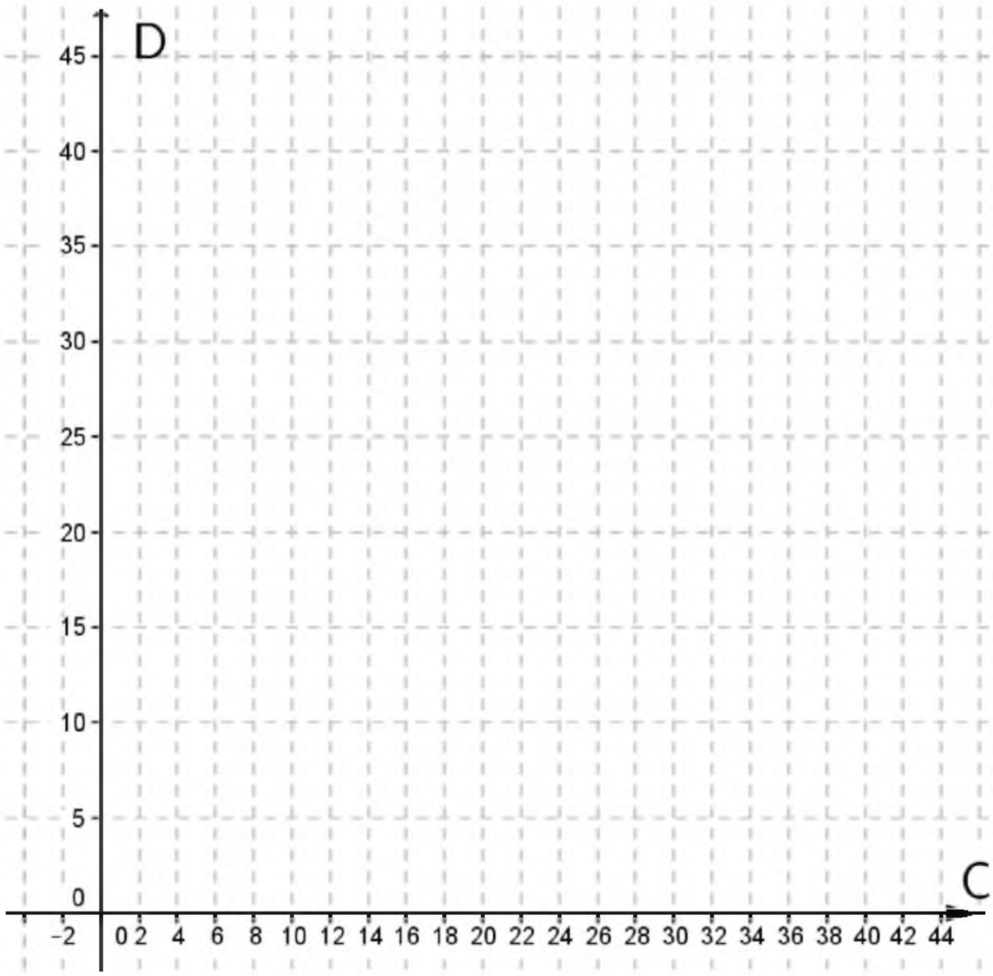
CAJA A: $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$
CAJA B: $3x^2 - 25x + 50$

9. Modelos Lineales

Problema 108 Florencia usa el bolsillo derecho de su pantalón para guardar billetes de $2 y el bolsillo izquierdo para guardar billetes de $5. No tiene monedas ni billetes de ningún otro valor. Hace un rato contó su dinero y comprobó que tiene, en total, $90.

a) ¿Cuántos billetes de $2 y cuántos de $5 puede tener? Escriban tres posibilidades distintas.

b) Ubiquen en este gráfico los puntos que corresponden a las tres posibilidades que encontraron en la pregunta anterior.



c) Observen el gráfico: ¿pueden hallar otras posibilidades para la cantidad de billetes de $2 y de $5 que tiene Florencia? Grafiquen todas las posibles.

d) ¿Cuál o cuáles de estas fórmulas relacionan la cantidad D de billetes de \$2 y la cantidad C de billetes de \$5 que tiene Florencia?

(i) $5D+2C=90$

(ii) $(2+D)\cdot(5+C)=90$

(iii) $2D+5C=90$

(iv) $D=45-5C$

(v) $C=90-D$

(vi) $C=45-D$

(vii) $C=18-\frac{2}{5}D$

(viii) $2D-5C=90$

Problema 109 Martín también tiene guardados billetes de \$2 y de \$5. Si los junta todos puede observar que tiene, en total, 32 billetes.

a) Escriban una fórmula que indique cuántos billetes de \$2 tiene Martín, en función de la cantidad de billetes de \$5 que posee.

b) Construyan un gráfico como el del problema anterior, en el que se describan las diferentes cantidades de billetes de \$2 y de \$5 que puede tener Martín.

c) Comparen el gráfico del punto anterior con el del Problema 108 (pueden hacer los dos gráficos en un mismo sistema de coordenadas).

d) ¿Puede ocurrir que Florencia tenga tantos billetes de \$2 como Martín? En caso de que sea posible, mencionen un ejemplo e indiquen cuánto dinero tendría en total cada uno. Si no es posible, expliquen por qué.

e) ¿Puede ocurrir que Martín tenga la misma cantidad de dinero que Florencia? En caso de que sea posible, mencionen un ejemplo e indiquen cuántos billetes de \$2 y cuántos de \$5 tiene cada uno. Si no es posible, expliquen por qué.

Problema 110 a) Decidan si existen dos números x e y que cumplan, simultáneamente las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x+2y=90 \\ x+y=32 \end{cases}$$

b) Comparen este problema con el anterior. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

Problema 111 Los doctores Cooper y Hofstadter investigan el funcionamiento de las siguientes cajas negras:

CAJA 1	
Entra	Sale
0	4
3	6
6	8
9	10

CAJA 2	
Entra	Sale
0	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{7}{2}$
6	$\frac{13}{2}$
9	$\frac{19}{2}$

a) Cooper ingresa el número $\frac{7}{2}$ y la caja le devuelve el $\frac{19}{3}$. ¿Pueden dar una explicación del funcionamiento de cada caja que permita responder en qué caja ingresó su número el Dr. Cooper?

b) Luego ingresa un número en la CAJA 2 y la caja le devuelve el doble del número que había ingresado. ¿Qué número ingresó?

c) El Dr. Hosftadter se divierte porque ha encontrado un número muy especial: no importa en cuál de las cajas lo ingrese, cualquiera de las dos le devuelve el mismo resultado. ¿De qué número se trata? (Piensen cuál o cuáles de las estrategias de los problemas anteriores pueden ayudar a investigar este problema).

Problema 112 Pedro trabaja lavando autos. Por cada auto que lava cobra \$60. Hoy al iniciar el día cuenta su dinero y ve que tiene \$40.

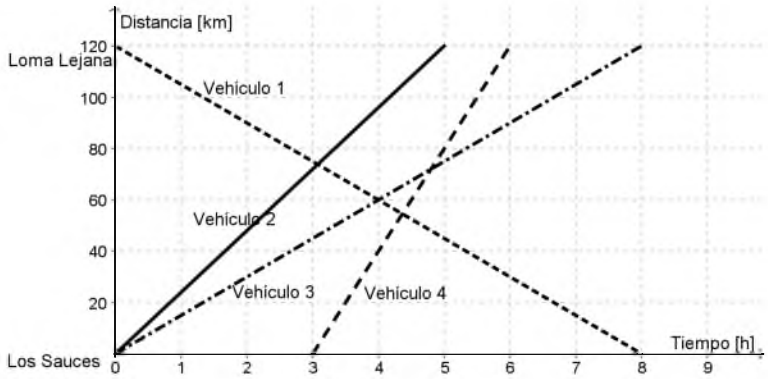
a) Completen la siguiente tabla:

Autos lavados	Dinero en la caja
1	
12	
14	
6	

b) Modelen los ingresos de Pedro mediante una fórmula que reciba de entrada la cantidad de autos que Pedro lava y devuelva la cantidad de dinero que tiene en su caja.

c) Usen la fórmula para determinar cuanto dinero tendrá si lava 25 autos.

Problema 113 Los pueblos de Los Sauces y Loma Lejana están a 120 km de distancia uno del otro. El siguiente gráfico describe los movimientos de cuatro vehículos que viajaron, en distintos momentos, entre los dos pueblos. Observen el gráfico y respondan las preguntas.



a) ¿Cuál o cuáles de los vehículos viajaron desde Los sauces hacia Loma Lejana?

b) ¿Cuál o cuáles de los vehículos viajaron desde Loma Lejana hacia Los sauces?

c) ¿Cuáles de los vehículos iniciaron su recorrido a la misma hora?

d) ¿Cuáles de los vehículos llegaron a su destino a la misma hora?

e) ¿Cuál de los vehículos fue el primero en llegar a su destino?

f) ¿Cuál de los vehículos fue el último en comenzar su recorrido?

g) ¿Cuál de los vehículos viajó a mayor velocidad?

h) ¿A qué distancia de Los Sauces se encontraron los vehículos 1 y 2, aproximadamente? ¿Cuánto tiempo había transcurrido, aproximadamente, desde el momento de su partida?

i) Ídem pregunta anterior, pero con respecto a los vehículos 3 y 4.

Problema 114 Enfoque analítico del Problema 113. Las siguientes preguntas se refieren también a la situación del gráfico anterior:

a) Escriban una fórmula que indique a qué distancia del pueblo de Los Sauces estará el Vehículo 3, en función del tiempo. ¿Qué valor debe devolver la fórmula si el tiempo ingresado es 0? ¿Y si es 8? ¿Pueden responder estas dos preguntas aunque no hayan encontrado la fórmula?

b) Escriban una fórmula que indique a qué distancia del pueblo de Los Sauces estará el Vehículo 2, en función del tiempo. ¿Qué valor debe devolver la fórmula si el tiempo ingresado es 0? ¿Para qué valor del tiempo la fórmula devolverá el valor 120? ¿Pueden responder estas dos preguntas aunque no hayan encontrado la fórmula?

c) Escriban una fórmula que indique a qué distancia del pueblo de Los Sauces estará el Vehículo 1, en función del tiempo. ¿Qué valor debe devolver la fórmula si el tiempo ingresado es 0? ¿Y si es 8? ¿Pueden responder estas dos preguntas aunque no hayan encontrado la fórmula?

d) Utilicen Las fórmulas obtenidas en los puntos b) y c) para investigar a qué distancia de Los Sauces se cruzaron los vehículos 1 y 2 y cuánto tiempo había transcurrido desde el momento de su partida. Comparen la solución obtenida con la respuesta a la pregunta h).

Problema 115 Como en el Problema 108, Florencia tiene billetes de \$2 y de \$5, pero ahora tiene en total \$95.

a) Propongan distintas cantidades de billetes de \$2 y de \$5 que pueda tener Florencia.

b) Escriban una fórmula que permita conocer la cantidad y de billetes de \$2 que tiene Florencia, a partir de la cantidad x de billetes de \$5 que posee.

c) Lorenzo tiene, entre billetes de \$2 y de \$5, un total de 37 billetes. Si tiene tanto dinero como Florencia, ¿cuántos billetes de \$2 y cuántos de \$5 tiene cada uno?

Problema 116

a) Inventen las ecuaciones de dos rectas, cuyo punto de intersección tenga coordenadas $(4, -3)$

b) Inventen las ecuaciones de dos rectas, cuyo punto de intersección tenga coordenadas $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

c) Inventen las ecuaciones de dos rectas que no se intersecten en ningún punto.

Problema 117 El problema del service de heladera. Se rompió la heladera, curioseamos un poco y llegamos a la sana conclusión que será mejor llamar a un service que entienda del asunto. Por suerte tenemos buenos amigos que nos han recomendado cuatro profesionales distintos, cada uno con las mejores referencias.

- **El primer service** cobra \$28 por la visita independientemente de lo que tenga la heladera y luego cobra \$63 por cada hora de trabajo.
- **El segundo service** cobra \$50 por la visita independientemente de lo que tenga la heladera y luego cobra \$50 por cada hora de trabajo.
- **El tercer service** cobra \$30 por la visita y luego \$30 por cada media hora de trabajo.
- **El cuarto service** sólo cobra \$40 por cada media hora de trabajo.

En cada caso el precio del trabajo se computa como la parte proporcional del tiempo que va desde que el service toca el timbre de la casa hasta que, una vez terminado el trabajo, el service escribe la factura y recibe el pago. En caso de que haya que colocar repuestos estimamos que todos tendrán un precio parecido.

a) ¿Qué service nos conviene llamar si creemos que el trabajo no puede durar más de una hora y queremos gastar lo menos posible?

b) Calculen qué service es más conveniente para las todas las posibles duraciones del arreglo de la heladera.

c) ¿Vale la pena tener los teléfonos de todos en la agenda?

d) A última hora recibimos una recomendación de un nuevo service. **El quinto service**, que tiene un peculiar sistema de cobrar su trabajo. Se ufana trabajar rápido y bien. Su lema es *No pierdo ni hago perder el tiempo.* Su sistema de cobro es $150 por la visita y -$60 por cada hora de demora en arreglar la heladera. ¿En qué casos conviene convocar a este profesional?

Problema 118 Calculen la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(50, 10)$ y $(104, 40)$.

10. Índices estadísticos

Un índice es una fórmula que combina ciertos datos estadísticos o mediciones de un fenómeno, en un único número, para condensar y sintetizar información sobre el mismo. Se utiliza como una herramienta para facilitar el análisis de datos y la toma de decisiones. Puede elaborarse mediante métodos estadísticos, pero también puede hacerse apelando a los conocimientos intuitivos que tengamos de un cierto tema.

Hay índices para todo: el promedio de los campeonatos de fútbol para ver qué equipo desciende de categoría es un índice. Hay varios índices para saber si una persona tiene peso normal o no, los hay para saber si los precios han aumentado en el último tiempo: el famoso índice de precios al consumidor: IPC. Hay índices para medir el impacto de una sociedad sobre el medio ambiente, para medir la calidad de vida de una sociedad, hay un índice para medir la seguridad de un vehículo, y así muchos más.

Ahora vamos a trabajar en elaborar nuestros propios índices para cuantificar ciertos fenómenos, y vamos a ver cómo la matemática tiene un papel central en la elaboración de estos índices y por lo tanto en el análisis de los mismos. En tanto no sepamos cómo están construidos no vamos a poder entender en profundidad cómo varían y cómo afectan a nuestras decisiones o las de otras personas que a su vez nos afectan a nosotros y a nuestras vidas.

Problema 119 En su cuenta de Instagram[1], en marzo de 2018, el comediante **Pablo Molinari** se interesó en el problema que él mismo (con el nombre **molinerd**) presentó de la siguiente manera:

> ¿Hay que enojarse o no cuando te *spoilean* una serie? ¿Cuán grave es que te cuente el final de *Breaking Bad* hoy? ¿Cuándo te puedo contar el final de *Mad Men* sin que te enojes? Este post intenta resolverlo.

A continuación reproducimos la fórmula que propuso el autor.

[1] Ver https://www.instagram.com/molinerd/; El post citado está específicamente en https://www.instagram.com/p/Bf3mbRgBj16/

En el mismo post se puede acceder a la explicación de la fórmula, que se reproduce (en parte) a continuación para comodidad del lector.

El índice de gravedad de spoiler (IGS) intenta solucionar el problema que se genera con todas esas personas que te spoilean una serie o película y cuando te enojás dicen "eh, no era para tanto".

Explicación

$$IGS = \frac{(EST - 7) \cdot CF \cdot CU}{AE} \tag{10.1}$$

IGS = índice de gravedad del spoiler. Suele estar entre 0 y 3.

EST = calidad de la serie, medida en estrellas, de 0 a 10. Es necesario poder medir la calidad ya que no es lo mismo spoilear una serie buena que una mala. Por supuesto este valor es subjetivo, pero como referencia nos podemos guiar por las estrellas que tiene en IMDb. A este valor se le resta 7, porque si te spoilean una serie que en IMDb tiene menos de 7 estrellas, ni te deberías enojar (cualquier bazofia tiene mínimo 7).

CF = coeficiente de final. Es igual a $1{,}5$ si te spoilean el final. Es igual a 1 si no es el final.

CU = coeficiente de unitario. Es igual a $1{,}2$ si las serie no consiste en capítulos unitarios (por ejemplo una novela), es igual a 1 si son unitarios (cada capítulo termina en sí mismo).

AE = años que pasaron desde la emisión de lo spoileado.

Valores de referencia

Entre 0 y $0{,}2$ = spoiler leve.

Entre $0{,}21$ y $0{,}3$ = spoiler medio.

Más de $0{,}3$ = spoiler grave.

Ejemplos

Breaking Bad

Estrellas (IMDb): $9{,}5$. Fin de emisión: 2013

Te spoilean en general: $0{,}5$ (grave)

Te spoilean el final: $0{,}75$ (grave)

Bonanza

Estrellas (IMDb): $7{,}3$. Fin de emisión: 1973

Te spoilean en general: $0{,}0066$ (leve)

Te spoilean el final: $0{,}01$ (leve)

a) Interpreten la fórmula (10.1) y calculen el IGS para las series Braking Bad y Bonanza de los ejemplos. Si la fórmula está bien interpretada deberían obtener los mismos resultados.

b) Elijan una serie que conozcan (y que ya haya finalizado). Calculen los dos valores del IGS (te spoilean en general o te spoilean el final) y luego comparen con otros compañeros para ver si obtuvieron el mismo resultado.

c) Los índices son más cómodos de interpretar si se adecúan para que el valor esté siempre entre un mínimo de 0 y un máximo de 1. ¿Qué corrección se puede intentar en la fórmula para lograr esa estandarización?

d) En el final de su post, el autor invita: "Se aceptan sugerencias para mejorar la fórmula." ¿Qué mejoras se les ocurren? ¿Hay otras características que se podrían evaluar y tratar de contemplar en la fórmula? Hagan intentos y pónganlos a prueba. Eventualmente (aunque la publicación tiene ya un tiempo) pueden visitar el post y comunicarse con el autor para compartirle sus ideas.

Problema 120 Elaboren un índice de afición a las redes sociales. El indice debe reunir dos datos: cantidad de servicios o redes (por ejemplo Facebook, Whatsapp, Instagram, Tweeter, blogs varios, ...) a las que la persona está suscripta o suele frecuentar y minutos diarios que dedica a navegar por esos medios. El indice debe calcularse a partir de una fórmula que tome en cuenta ambos datos y los combine generando un número que va a ser el valor del indice de afición a las redes sociales. El objetivo es poder comparar y establecer escalas entre individuos aficionados a las redes sociales en base a datos concretos que puedan ser obtenidos de alguna forma.

a) ¿Cuál es mayor valor que puede tomar el índice que elaboraron?

b) ¿Cuál de los dos datos tiene más importancia en el índice que elaboraron?

c) ¿Pueden rediseñar el índice para que el otro factor crezca en importancia?

d) ¿Pueden hacer que ambos datos tengan una incidencia pareja en la determinación de la afición a las redes sociales?

Problema 121 El índice birra, es un índice elaborado en el programa de radio **Su atención por favor**[2], en el que entrevistan a gente que vive en distintas ciudades del mundo y en algún momento les preguntan cuánto vale tomar una cerveza en el bar de esa ciudad. Una vez obtenido ese valor, lo convierten a nuestra moneda para establecer comparaciones entre las ciudades.

a) Escriban la fórmula que reciba como parámetros o datos el precio de la cerveza en la moneda extranjera, el precio de la cerveza en el bar de la esquina de la Plaza San Martín de Moreno, la cotización de la moneda extranjera en pesos argentinos y calcule el índice.
b) Encuentren al menos un aspecto objetable del índice. Justifiquen por qué lo es.
c) Propongan alguna forma de subsanar el aspecto criticable que hayan encontrado.

Problema 122 Se puede pensar en una enorme diversidad de temas para los que puede ser interesante elaborar índices. Una actividad motivadora para el cierre del TRP puede consistir (se ha realizado con mucho entusiasmo en ediciones anteriores) en crear índices diversos, de temas variados.

En los problemas 119 y 121 se presentaron algunos de corte algo humorístico. Las propuestas que vienen a continuación van en otro sentido. Apelan al compromiso e interés de cada estudiante con temas de actualidad que nos interpelan y nos invitan a reflexionar.

a) Elaboren un índice de tendencia machista. El mismo debe asignar valor 0 a las personas que no manifiestan en sus opiniones ni actitudes ningún tipo de inclinación al machismo y con 1 a los que están más lejos de superar esa condición.
b) Elaboren un índice de apertura respecto a la diversidad de género. El mismo debe asignar valor 0 a las personas que no se muestran nada tolerantes respecto a la diversidad y con 1 a las que son totalmente desprejuiciadas.

Problema 123 Elijan alguno o algunos de estos temas que les interesen para diseñar índices y discutan entre ustedes las distintas alternativas para la elaboración de cada uno[3].

a) Índice de tolerancia a las diferencias culturales.
b) Índice de tolerancia a los valores morales diferentes de los propios.
c) Índice de compromiso personal con los problemas sociales que se producen en el territorio (barrio).
d) Índice de conciencia (autoconciencia) de los fundamentos con que avalamos nuestras creencias personales.
e) Índice de conciencia (autoconciencia) de la influencia de los medios de comunicación en la formación de nuestras opiniones.

[2] Conducido, en su momento, por Nico Artusi y Shumi Gauto, en radio Metro.
[3] Los temas fueron sugeridos por María de los Ángeles Martini, coordinadora del Taller de Ciencias.

f) Índice de aceptación del lenguaje inclusivo.

g) Índice de empleo del lenguaje inclusivo. Pueden considerar las siguientes variables[4]:
   - Destinatario
   - Ocasión
   - Situación
   - Ámbito o comunidad de discurso
   - Medio (oral, escrito, virtual)
   - Género (conversación formal/informal, exposiciones escolares, académicas o profesionales; e-mail, chat, comentario en redes sociales, etc.)
   - Frecuencia
   - Sistematicidad
   - Sostenibilidad de principio a fin de una comunicación, etc.

Observación: Estos problemas están propuestos para jugar matemáticamente con las posibilidades de diseñar un índice, pero que no debe ser tomado en serio como un instrumento de diagnóstico de ningún tipo. El diseño serio de un índice sobre adicciones o hábitos o cuestiones de salud de cualquier tipo requiere la opinión y el asesoramiento de profesionales de campos como la psicología o la medicina. Ningún alumno ni alumna debe considerarse diagnosticado por estos indicadores que estamos proponiendo como un ejercicio matemático.

[4]Fueron sugeridas por María Elena Bitonte, coordinadora del Taller de Lectura y Escritura Académicas.

11. Geometría

Geometría sintética

Problema 124 Patios

a) Un patio embaldosado, con forma de cuadrado de 10 m de lado, tiene en el centro una fuente circular de 2 m de diámetro.
   (i) Dibujen un mapa del patio.
   (ii) Calculen el área de la superficie del piso del patio que lleva baldosas.

b) Un patio embaldosado, con forma de cuadrado de 12 m de lado, tiene en el centro de cada lado una fuente semicircular, cuyo lado recto apoya sobre la pared del patio. Los radios de los semicírculos que forman las fuentes miden 3 m.
   (i) Dibujen un mapa del patio.
   (ii) Calculen el área de la superficie del piso del patio que lleva baldosas.
   (iii) Estimen cuántas cajas de baldosas de 20×20 cm sería necesario comprar para embaldosar todo el patio, si cada caja trae 25 baldosas. Tengan en cuenta que cuando se embaldosan bordes circulares hay que cortar baldosas y se desperdicia parte de la baldosa cortada, que ya no puede volver a utilizarse para otro borde. Expliquen la forma en que pensaron la estimación, con un plano del patio.
   (iv) Para hacer el zócalo del patio se utilizan baldosas de 10×10 cm. Calculen cuántas cajas van a ser necesarias para hacer el zócalo de todo el perímetro del patio (esto incluye el borde de las fuentes), sabiendo que la caja de baldosas de 10×10 cm trae 50 unidades.

c) Un patio embaldosado, con forma de cuadrado de 6m de lado, tiene en un par de fuentes con forma de cuarto de círculo como muestra la Figura 11.1. La fuente más grande tiene el doble de radio que la fuente más chica.

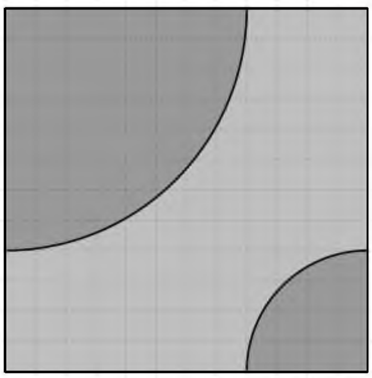


Figura 11.1: Patio con fuentes

Se sabe que una pintura para pisos tiene un rendimiento de 8 metros cuadrados por litro. Calculen cuántos litros de esa pintura se necesitan para pintar el piso del patio.

Problema 125 Las medidas reglamentarias de una cancha de básquetbol son 28 m de largo y 15 m de ancho. El círculo central tiene un diámetro de $3,5$ m Estimen la cantidad de pintura que fue necesaria para pintar las regiones sombreadas, si se han dado dos manos de pintura al látex que cubre 10 m^2 por litro.

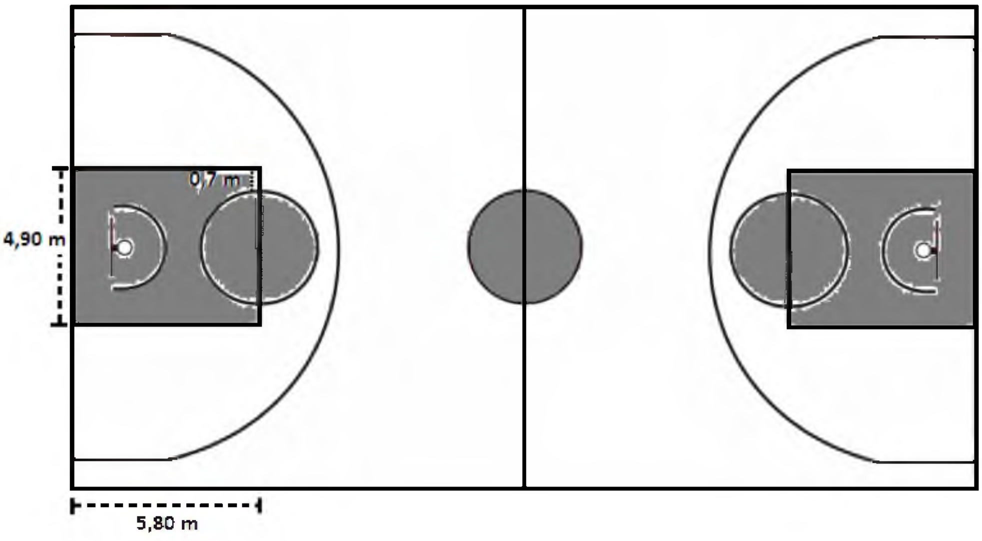
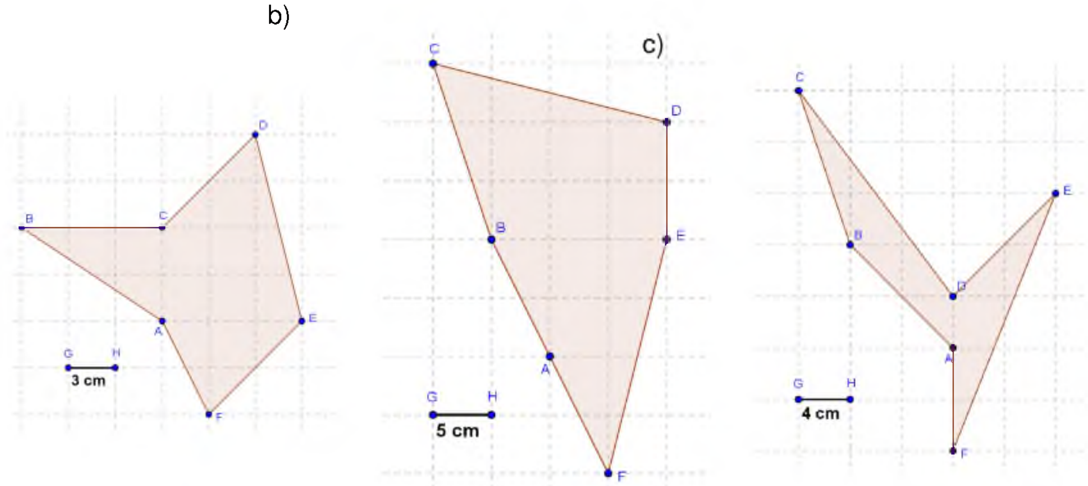


Figura 11.2: Cancha de basquetbol

Problema 126 En cada figura la cuadrícula tiene la medida indicada en el segmento GH. Calculen el área y el perímetro de cada polígono.

a) b) c)



Problema 127 Hallen el área los pentágonos de la Figura 11.3 sabiendo que cada uno de ellos tiene todos sus lados de la misma longitud y teniendo en cuenta como dato la longitud del segmento que aparece indicado en cada figura.

ATENCIÓN: observen que los cuatro pentágonos están dibujados en escalas distintas.

Problema 128 Los poliominós son polígonos construidos en base a adosar cuadrados iguales a lo largo de sus lados, haciéndolos coincidir totalmente. Como una pieza de dominó consta de dos cuadrados, surge la idea de llamar triominó a las piezas compuestas de tres cuadrados y tetrominós a las compuestas de cuatro cuadrados, estas últimas son las piezas del Tetris, uno de los juegos de computadora más exitosos de todos los tiempos. En la Figura 11.4a se muestran los poliominós de 2, 3 y 4 cuadrados. Dos poliominós se considerarán iguales si se puede pasar de uno a otro rotándolo o espejándolo, en la Figura 11.4b se ven todas las formas en que se puede ubicar el

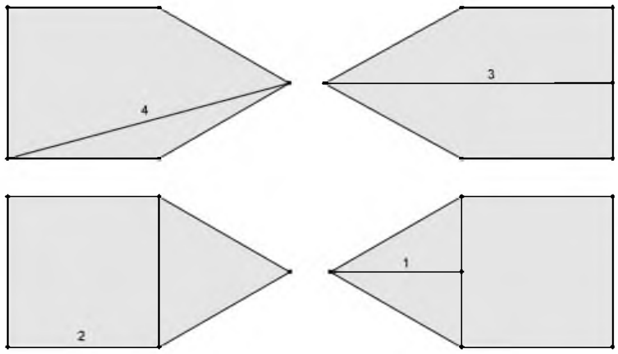
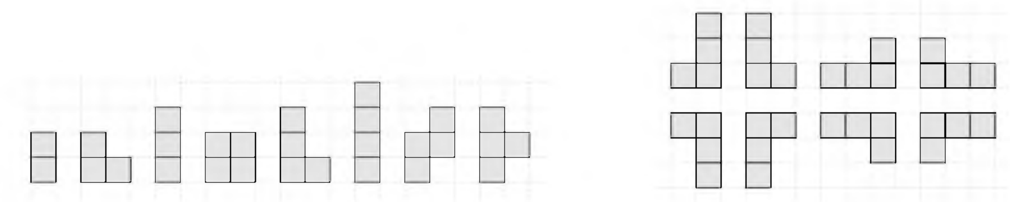


Figura 11.3: Pentágonos equiláteros

4-omino L. En general se usa la notación n-ominós para indicar a los poliominós compuestos de n cuadrados. En principio consideraremos a cada cuadrado componente de los poliominós teniendo lado 1 y por lo tanto área 1.



(a) Primeros poliominós (b) Simetrías y reflexiones

Figura 11.4: Poliominós

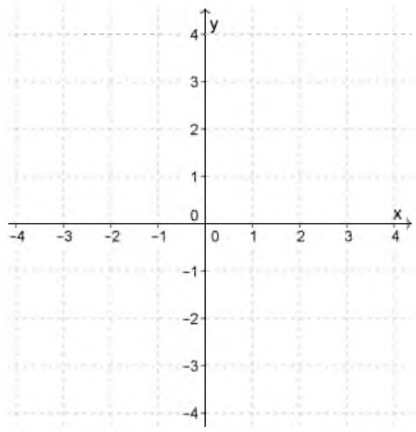
a) Construyan un poliominó de área 14 y perímetro 18. ¿Cuántos poliominós diferentes pueden construir que cumplan estas dos condiciones?
b) Construyan un poliominó de área 14 y perímetro 28. ¿Cuántos poliominós diferentes pueden construir que cumplan estas dos condiciones?
c) Construyan un poliominó de área 14 y perímetro máximo.
d) Construyan un poliominó de área 14 y perímetro mínimo.
e) Construyan un poliominó de área 14 y perímetro 21.
f) Si el módulo del poliominó se hace más chico, (por ejemplo de lado $\frac{1}{2}$ y por lo tanto área $\frac{1}{4}$. ¿Será posible construir un poliominó de área 14 y perímetro 50? ¿Y una de área 14 y perímetro 100?
g) ¿Se podrá hallar siempre un módulo lo suficientemente chico como para que dado un perímetro dado pueda construirse un poliominó de área 14 y perímetro tan grande como se propongan?
h) Si el módulo del poliominó se hace más chico, ¿Será posible construir un poliominó de área 14 y perímetro 14?
i) ¿Pueden construir una figura de perímetro 14 y área 14? ¿Den alguna explicación de por qué no puede ser un poliominó?
j) ¿Cuál será el perímetro mínimo que puede tener una figura de área 14?

Problema 129 Encuentren una fórmula que relacione el área, el perímetro y la cantidad de puntos interiores de los poliominós. Se define punto interior a un punto del poliominó donde coinciden los vértices de 4 cuadrados que forman parte del poliominó.

Geometría analítica

Problema 130

a) Ubiquen, en el sistema de coordenadas, cinco puntos distintos, A, B, C, D, y E, de manera que la distancia entre cada uno de ellos y el punto $(0, 0)$ sea exactamente 2. Luego anoten las coordenadas de los puntos:



$A = (\ , \ )$

$B = (\ , \ )$

$C = (\ , \ )$

$D = (\ , \ )$

$E = (\ , \ )$

b) Existen más puntos –además de los cinco que pueden haber encontrado– cuya distancia al $(0, 0)$ es 2. ¿Cuántos piensan que hay?

c) ¿Hay una forma de describir geométricamente cuáles son todos los puntos del plano que cumplen la condición pedida?

d) ¿Hay algún cálculo que permita verificar si cada punto propuesto cumple o no cumple la condición pedida?

e) ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas que relacionan a las coordenadas x e y de un punto, determinan puntos que están a distancia 2 del $(0, 0)$?

- $x + y = 2$
- $\sqrt{x + y} = 2$
- $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$
- $xy = 2$
- $x^2 + y^2 = 4$

Problema 131 La computadora de Martín tiene distintos programas que utiliza para elegir puntos del plano y graficarlos en un sistema de coordenadas. Este problema consiste en interpretar los distintos programas de la computadora. En cada caso deben construir un sistema de coordenadas como el del Problema 130 y marcar los puntos que la computadora de Martín marcaría al seguir las instrucciones del programa:

Programa 1	Marcar todos los puntos que tienen sus dos coordenadas menores que 3.
Programa 2	Marcar todos los puntos tales que ninguna de sus dos coordenadas es mayor que 3.
Programa 3	Marcar todos los puntos que tienen alguna de sus dos coordenadas menor que 2.
Programa 4	Marcar todos los puntos que tienen alguna de sus dos coordenadas mayor que 3.
Programa 5	Marcar todos los puntos que tienen sus dos coordenadas iguales.
Programa 6	Marcar todos los puntos que tienen sus dos coordenadas positivas.
Programa 7	Marcar todos los puntos tales que el producto de sus dos coordenadas es un número positivo.
Programa 8	Marcar todos los puntos tales que el producto de sus coordenadas es 0.
Programa 9	Marcar todos los puntos tales que la suma de sus coordenadas es 0.
Programa 10	Marcar todos los puntos tales que la suma de sus coordenadas es 3.
Programa 11	Marcar todos los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus coordenadas es 9.
Programa 12	Marcar todos los puntos tales que el producto de sus coordenadas no supera a 4.

Problema 132 En la siguiente lista, algunos de los programas de la computadora de Martín, que aparecían en el problema anterior, están expresados mediante fórmulas que relacionan a las coordenadas x e y de los puntos del plano. Compárenlas con las instrucciones del problema anterior e intenten escribir fórmulas para expresar el resto de los programas.

Programa 1:	
Programa 2:	$x \leq 3$ y $y \leq 3$
Programa 3:	
Programa 4:	$x > 3$ o $y > 3$
Programa 5:	
Programa 6:	$x > 0$ y $y > 0$
Programa 7:	
Programa 8:	
Programa 9:	$x + y = 0$
Programa 10:	
Programa 11:	
Programa 12:	

Problema 133 La computadora de Martín recibió una nueva lista de programas y marcó con gris los puntos que se ven en los siguientes gráficos. Escriban, debajo de cada gráfico una fórmula que relacione las coordenadas x e y de los puntos y describa cómo fue construido.

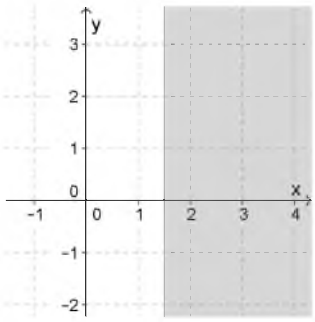


Figura 11.5: Fórmula:

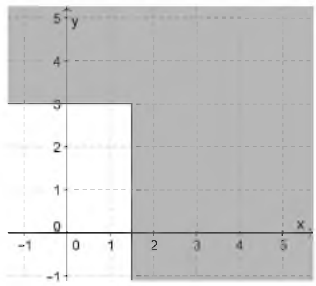


Figura 11.6: Fórmula:

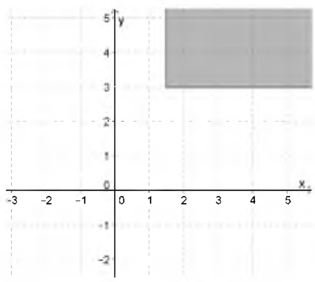


Figura 11.7: Fórmula:

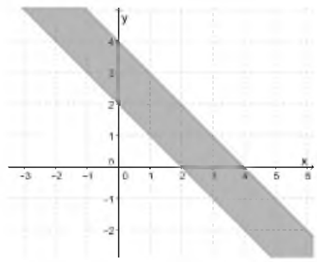


Figura 11.8: Fórmula:

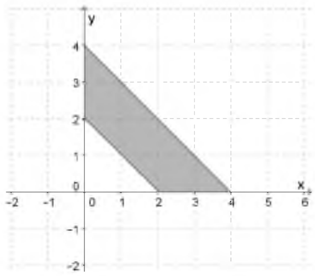


Figura 11.9: Fórmula:

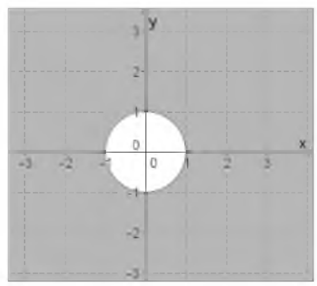


Figura 11.10: Fórmula:

Problema 134

a) ¿Cómo se modifica el Problema 130 si se pide que la distancia entre el punto $(0, 0)$ y los puntos buscados sea 5? Resuélvanlo para este caso.

b) ¿Cómo se modifica el Problema 130 si se pide que la distancia entre el punto $(0, 0)$ y los puntos buscados sea *a lo sumo* 5? Resuélvanlo para este caso.

c) ¿Cómo se modifica el Problema 130 si se pide que la distancia entre el punto $(0, 0)$ y los puntos buscados sea *por lo menos* 5? Resuélvanlo para este caso.

Problema 135

a) ¿Cómo se modifica el Problema 130 si se pide que la distancia entre el punto $(1, 2)$ y los puntos buscados sea 4? Resuélvanlo para este caso.

b) ¿Cómo se modifica el Problema 130 si se pide que la distancia entre el punto $(1, 2)$ y los puntos buscados sea *a lo sumo* 4? Resuélvanlo para este caso.

c) ¿Cómo se modifica el Problema 130 si se pide que la distancia entre el punto $(1, 2)$ y los puntos buscados sea *por lo menos* 4? Resuélvanlo para este caso.

Problema 136 Consideren las Figuras que van de la 11.11 a la 11.16 y, como en el Problema 132, describan mediante ecuaciones y/o inecuaciones condiciones sobre las coordenadas x e y, los puntos (x, y).

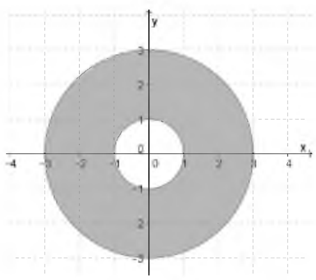


Figura 11.11: Fórmula:

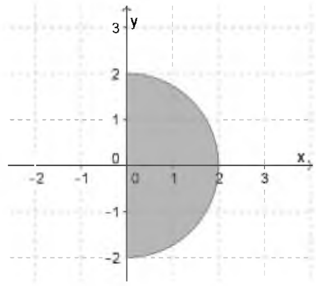


Figura 11.12: Fórmula:

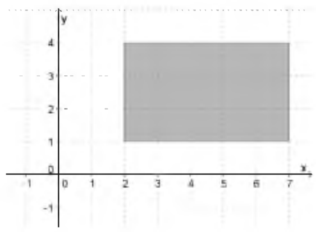


Figura 11.13: Fórmula:

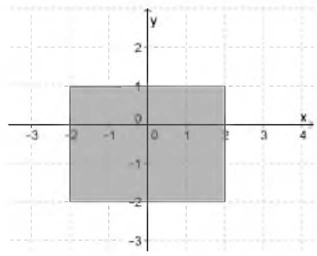


Figura 11.14: Fórmula:

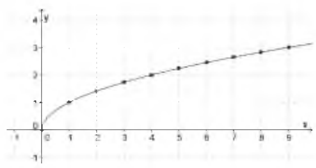


Figura 11.15: Fórmula:

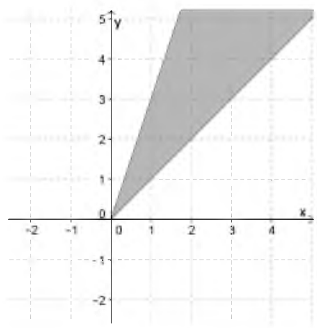


Figura 11.16: Fórmula:

Problema 137 Propongan, en cada caso, 5 puntos cuyas coordenadas (x, y) cumplan con todas las condiciones indicadas y ubiquen los puntos en un sistema de coordenadas (uno distinto para cada ejercicio).

a) $x \leq 2y$
$A = (\ , \ )$ $B = (\ , \ )$ $C = (\ , \ )$ $D = (\ , \ )$ $E = (\ , \ )$

b) $x \leq 2y$ y $-3 \leq x \leq 2$
$A = (\; , \;)$ $B = (\; , \;)$ $C = (\; , \;)$ $D = (\; , \;)$ $E = (\; , \;)$

c) $x \leq 2y$ y $-3 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq y \leq 3$
$A = (\; , \;)$ $B = (\; , \;)$ $C = (\; , \;)$ $D = (\; , \;)$ $E = (\; , \;)$

d) $y \geq x^2$ y $y < 4$
$A = (\; , \;)$ $B = (\; , \;)$ $C = (\; , \;)$ $D = (\; , \;)$ $E = (\; , \;)$

e) $y \geq x^2$ y $x < 4$
$A = (\; , \;)$ $B = (\; , \;)$ $C = (\; , \;)$ $D = (\; , \;)$ $E = (\; , \;)$

Problema 138 Grafiquen, en cada caso la región del plano descripta por las siguientes ecuaciones e inecuaciones, que son las mismas del problema anterior.

a) $x \leq 2y$

b) $x \leq 2y$, $-3 \leq x \leq 2$

c) $x \leq 2y$, $-3 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 3$

d) $y \geq x^2, y < 4$

e) $y \geq x^2, x < 4$

Problema 139 Una oveja está atada con una correa que rodea su cuello y que tiene el otro extremo fijado a un poste. El poste está en el centro de un cuadrado cuyos lados miden 5 m. Toda la superficie del cuadrado está cubierta de pasto verde y tierno.

a) ¿Cuál es la menor longitud posible que puede tener la correa, si se desea garantizar que la oveja pueda comer todo el pasto del terreno?

b) ¿Cuál es la mayor longitud posible que puede tener la correa, si se desea garantizar que la oveja no pueda salir del terreno? En cada uno de los casos anteriores, representen la situación graficando en un sistema de coordenadas y describan, mediante inecuaciones, la región cuyo pasto será comido por la oveja.

Problema 140 Una vaca se encuentra atada con una correa que rodea su cuello y que tiene el otro extremo atado a un poste. El poste es uno de los cuatro vértices de un corral cuadrado (alambrado en todo su perímetro) cuyos lados miden 5 m. Tanto dentro como fuera del corral el piso está cubierto de pasto verde y tierno.

a) ¿Cuál debe ser la longitud de la correa si la vaca se encuentra en el interior del corral, y se desea que pueda comer el pasto de la mitad de la superficie del corral?

b) Si la vaca se encuentra fuera del corral, ¿cuál debe ser la longitud de la correa si se desea que pueda comer el doble de la superficie del corral?

c) ¿Cuál es la cantidad de pasto comido en función a longitud de la correa, si la vaca se encuentra fuera del corral?

12. Definiciones

Problema 141 En este problema trabajarán a partir de la interpretación de una definición matemática. Antes de leer el enunciado del problema, consulten el Glosario de la página 128 para comprender qué es una definición.

> **Definición 1:** Un número es ***cuadrado*** si es igual a un número entero multiplicado por sí mismo.

> **Definición 2:** Un número es ***azul*** si es la suma de algún número entero y su cuadrado.

a) Interpreten la Definición 1 y construyan una lista de números cuadrados.

b) Interpreten la Definición 2 y decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen la decisión tomada:
   (i) Todos los números azules son números enteros.
   (ii) Existen números azules que son enteros.
   (iii) Existen números azules que son racionales.
   (iv) Existen números azules que no son enteros.
   (v) Todos los números azules son pares.
   (vi) Existen números azules negativos.

c) Decidan cuáles de los siguientes números son azules y cuáles no. Expliquen la decisión tomada:

- 280
- 2
- $\sqrt{2} + 2$
- -182
- $\frac{3}{5}$
- 0
- 182
- 870

Problema 142 El concepto de número ***azul***, definido en el problema anterior, no figura en los libros tradicionales de matemática ni forma parte de la matemática "clásica" que se estudia en la escuela o en la universidad, sino que fue inventado para desarrollar el problema. Cualquiera puede inventar y definir un concepto matemático y ponerle un nombre.

a) Inventen un tipo de número, dándole un nombre específico y estableciendo su definición.
b) Intercambien la definición inventada con un compañero o compañera.
c) Lean la definición recibida y escriban una lista de números que verifiquen esa definición.
d) Devuelvan la definición y la lista de ejemplos a su autor y reciban la propia. Luego controlen la lista de ejemplos y decidan si la definición que inventaron fue bien interpretada por su compañero o compañera.

e) En el punto b) del **Problema** 141 se realizaron algunas afirmaciones acerca de los números azules. Realicen proposiciones acerca de los números definidos por su compañero o compañera e intenten justificar las que resulten verdaderas.

Problema 143 Consideren nuevamente la definición de número ***azul***, del **Problema** 141:

a) Escriban la fórmula de una función que a cada número entero le asigne un número azul.

b) Consideren la siguiente afirmación:

La suma de dos números azules es un número azul.

Decidan si la afirmación es válida...

(i) ...para todas las parejas de números azules (y en ese caso justifiquen por qué es válida).

(ii) ...para ningún par de números azules (y en ese caso justifiquen por qué no es válida).

(iii) ...solo para algunas parejas de números azules (y en ese caso muestren alguna pareja para la que la afirmación resulte válida y otra para la cual la afirmación resulte falsa).

c) Consideren la siguiente afirmación:

El producto de dos números azules es un número azul.

Decidan si la afirmación es válida...

(i) ...para todas las parejas de números azules (y en ese caso justifiquen por qué es válida).

(ii) ...para ningún par de números azules (y en ese caso justifiquen por qué no es válida).

(iii) ...solo para algunas parejas de números azules (y en ese caso muestren alguna pareja para la cual la afirmación resulte falsa e investiguen si hay alguna manera de construir muchos ejemplos para los que la afirmación resulte verdadera).

d) Algunas personas sostienen la siguiente conjetura[1]: "*Si a un número azul se lo multiplica por 4 y se le suma 1 siempre se obtiene un número cuadrado*". Investiguen si esto es cierto.

e) Dando valores enteros positivos al número k, la fórmula $k + k^2$ permite generar distintos números azules. Investiguen qué sucede si, para la misma fórmula, consideran valores negativos de k. Intenten explicar la observación que realicen.

Problema 144 En la Universidad de Luarca se han definido los números ***azules*** como los números de la forma $1000n + 420$ dónde n puede ser cualquier número entero. ¿Cuál es la definición correcta de número azul, la de la Universidad de Moreno, dada en el **Problema** 141, o la de la Universidad de Luarca?

Problema 145 Decimos que un número es ***volador*** si es igual a la suma de un número entero y su siguiente.

a) Escriban 5 números voladores distintos. Expliquen por qué son voladores.

b) Decidan si el 747 es volador o no, justificando la respuesta.

c) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta en cada caso:

(i) Todos los números voladores son impares.

(ii) Todos los números voladores son menores que 10000.

d) Escriban la fórmula de una caja negra que devuelve un número volador cada vez que ingresa un número entero.

[1] Pueden consultar en el Glosario de la página 128 el significado de esta palabra.

Problema 146 Se dice que un número entero es ***imperfecto*** si es igual a un cuadrado menos 1. (Recordar que un cuadrado es un número que es igual a un número entero elevado al cuadrado).

a) Confeccionen una lista de 10 números imperfectos.

b) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (i) Todos los números imperfectos son menores que 10000.

   (ii) El número 1763 es un número imperfecto.

c) Supongamos que los números imperfectos se van ordenando en una lista de menor a mayor. ¿Encuentran algún patrón de cómo se va formando la lista?

d) Describan una caja negra que transforme cada número entero en un número imperfecto. ¿Cómo es su fórmula?

Apéndice A: Complemento teórico

¿Cómo se usa este apéndice?

¡ATENCIÓN! El material de este apéndice está pensado como un complemento de las clases y del trabajo en el taller, pero posiblemente pierda gran parte de su sentido si se lee en forma aislada. En cada encuentro del taller se encontrarán con problemas cuyas soluciones no resultarán obvias y la parte más enriquecedora, formativa y, por qué no, estimulante, ocurrirá en los momentos en los que deban pensar la manera de abrirse camino hacia una posible respuesta.

Como ese camino no siempre será sencillo, se espera que en la clase se generen debates y se confronten ideas muy diversas. En el desenlace de esos debates irán apareciendo las ideas que finalmente se convertirán en los conceptos.

Después de haber participado de todo este proceso, la lectura del material de este apéndice funcionará como una síntesis de lo que en el aula haya sucedido. Desde luego, es imposible anticipar con precisión la totalidad de las ideas que puedan llegar a aparecer. Seguramente en muchos casos la información que encontrarán excederá a lo hablado en la clase. Por este motivo es muy importante que utilicen este material como una lectura posterior a cada clase. Sus profesores o profesoras les irán pautando las secciones del apéndice que pueden ir leyendo y también les recomendarán qué lecturas postergar. Atiendan muy especialmente a estas recomendaciones.

Para los que tienen matemática en sus carreras.

Las dos ideas que queremos promover a partir de este párrafo son, *mutatis mutandis*[2], aplicables a las distintas disciplinas que vas a estudiar en la universidad o en cualquier camino que vayas emprender.

> La primera idea es: *la matemática es accesible a todo el que decida emprender su estudio con dedicación y seriedad*. No hace falta haber nacido con un talento especial. No hay que dejarse desalentar por posturas elitistas que afirmen, explícita o implícitamente que la matemática universitaria es para unos pocos. Esto nos lleva la segunda idea.
>
> La segunda idea es: *aprender matemática requiere mucha dedicación y trabajo sostenido*. Requiere buscar los tiempos adecuados de estudio, el lugar adecuado[3] y los compañeros con los que uno se puede sentir cómodo o cómoda en la situación de estar estudiando.

[2]Si no conocen esta expresión pueden consultarla en el Glosario de este cuadernillo.

[3]Puede ser en una casa, pero también en la Biblioteca de nuestra Universidad, en el bar, en las aulas vacías y los distintos espacios de los que pueden apropiarse.

La recompensa del esfuerzo y la dedicación es percibir cómo se va construyendo una relación de cercanía y de confianza con la disciplina. Una relación que, como todo aprendizaje, contribuye al crecimiento personal esperable de una experiencia universitaria.

Entrando en Calor

Ezequiel salió de su casa hacia la escuela, bebiendo distraídamente un agua saborizada en una botellita de plástico. Cerró la puerta –que tiene picaporte fijo del lado de afuera– y al instante se dio cuenta de que había olvidado las llaves adentro. Pero ya era demasiado tarde: la puerta había quedado trabada por el pestillo y Ezequiel tenía un problema: ¿cómo volver a entrar a su casa?

Sin perder la calma, se sentó a terminar su bebida con la espalda contra su puerta y a pensar alguna solución. Como la puerta no estaba cerrada con llave, necesitaba empujar el pestillo de alguna manera. Intentó deslizar una tarjeta de plástico. Probó con la SUBE y con su carnet de socio de Sportivo Desamparados, pero no eran lo suficientemente flexibles y no conseguían curvarse hasta llegar al pestillo. Volvió a sentarse y se distrajo mirando su botella de plástico ya vacía. ¡Entonces tuvo una idea! Con una tijera que llevaba en su cartuchera cortó el cuello de la botella y también la base, de manera que le quedó un cilindro de plástico, sin tapas. Luego hizo un corte recto en el cilindro, de base a base, y pudo desplegar el plástico como una lámina rectangular. Esa lámina de plástico sí resultó suficientemente larga y flexible. La deslizó con cuidado en la ranura y consiguió empujar el pestillo. La puerta se abrió y pudo ver su manojo de llaves sobre la mesa.

Dos semanas más tarde, a Diego, un amigo de Ezequiel, le sucedió el mismo accidente. Escribió un tweet para contárselo a sus amigos. Ezequiel leyó el tweet y respondió enseguida, explicándole el truco de la botella de plástico. Diego siguió las instrucciones de Ezequiel y consiguió resolver el problema de abrir su puerta.

¿Qué diferencia hay entre el problema que resolvió Ezequiel y el que resolvió Diego? Los dos hicieron lo mismo (cortar la botella) para abrir la puerta. Pero Ezequiel se encontró primero con el problema, tuvo que pensar ideas, aceptar que las primeras no funcionaran y encontrar una idea original que resultó exitosa. En cambio, a Diego le explicaron cómo resolver el problema y aplicó una solución ya conocida para un problema ya conocido. **Diego aprendió a abrir una puerta, pero no aprendió a resolver otro problema nuevo que se le pueda presentar.**

La mayoría de las veces la matemática que se enseña en la escuela apunta más a resolver problemas como el de Diego que problemas como el de Ezequiel. Se enseña un tipo de problema y el método para resolverlo, pero no se enseña a descubrir los métodos o a inventar otros métodos distintos del que propone el profesor.

En este taller deseamos desarrollar y resolver problemas matemáticos. Para eso, necesitamos conocer recursos que permitan enfrentarse a una situación nueva. Uno de esos recursos es desarrollar la confianza en las ideas propias y la capacidad de frustración para aceptar que las primeras ideas no funcionen. Los problemas de la clase titulada "Entrando en calor" apuntan a mostrar algunos métodos que sirven para resolver algunos problemas. El trabajo a lo largo de todo el taller tendrá que ver con pensar en esos métodos cada vez que nos encontremos frente a un problema nuevo, para ver si nos pueden ayudar a resolverlo o –al menos– a lograr un primer avance hacia la solución completa.

David Perkins, en su libro La bañera de Arquímedes y otras historias del descubrimiento científico [10] identifica cinco momentos en el proceso creativo de hallar una solución a un problema.

Toma como ejemplo la historia de Arquímedes, a quien el rey Hierón II de Siracusa le encomendó comprobar si la corona que había mandado a hacer a un joyero había sido fabricada con todo el oro que le había suministrado. La corona pesaba lo mismo, pero el rey sospechaba que el joyero podría haber reemplazado parte del oro por plata, que no es tan densa como el oro, sin que se notara el efecto. Por supuesto que la comprobación debía realizarse sin romper la corona. Arquímedes llevaba bastante tiempo pensado el problema cuando acudió a los baños públicos. Al sumergirse en una bañera notó que el agua desbordaba: cuanto más se sumergía más agua desbordaba. Ahí tuvo un chispazo que lo iluminó. Sumergiendo la corona podría hallar su volumen y así averiguar si correspondía al volumen del oro suministrado. Cuenta la leyenda que Arquímedes salió corriendo desnudo por la calle gritando "¡Eureka!"(¡lo encontré!).

Las cinco etapas que identifica Perkins para que se produzca el chispazo iluminador como el que cuenta la historia de Arquímedes son las siguientes.

1. *Larga búsqueda:* el salto de pensamiento requiere una larga búsqueda. Resolver problemas requiere dedicación, constancia, tesón, esfuerzo. Hay que ponerle pila. Ésa es una parte importante de la cultura de los estudios universitarios. Cualquier logro está cimentado por todo el trabajo previo. Además, una larga búsqueda permite familiarizarse profundamente con el problema en el que se está trabajando. Científicos, inventores, artistas apoyan este punto de partida como base necesaria para el éxito en la búsqueda. Se le atribuye a Louis Pasteur la frase: *la suerte favorece a la mente preparada*. Thomas Edison, declaró que la invención requiere de 1 % de inspiración y 99 % de transpiración. Pablo Picasso, el genial pintor malagueño, lo sintetiza en una frase con elegancia y humor: *Cuando venga la inspiración que me encuentre trabajando*.

2. *Escaso avance aparente:* el salto mental sobreviene luego de períodos donde no se vislumbra avance. Se corre frecuentemente el riesgo de entrar en el desaliento, de largar todo, de renunciar definitivamente al problema, pensando que es demasiado para nosotros o para nuestra capacidad. Lo mejor será interrumpir momentáneamente la búsqueda, descansar un rato pensando en otra cosa, (puede ser cambiar de problema), tomarse unos mates, salir a dar una caminata. Muchas veces corremos el riesgo de quedarnos fijados a una vía muerta que no conduce a ninguna solución. Una buena práctica puede ser volver a empezar por un camino nuevo.

3. *Acontecimiento desencadenante:* el típico progreso comienza con una acontecimiento desencadenante. Muchas veces un suceso externo marca ese momento: el agua rebalsando la bañera, en el caso de Arquímedes. En otros casos basta con un acontecimiento mental: una inspiración que permite ver el problema desde un ángulo nuevo o captar un detalle que nos había pasado desapercibido y que de golpe cobra significación.

4. *Chasquido cognitivo:* el progreso ocurre súbitamente, como encontrar una pieza de un rompecabezas que buscamos hace rato, de golpe todo encaja, es como un chasquido cognitivo, dice Perkins. No pasa mucho tiempo entre el acontecimiento desencadenante y la solución, aun cuando sea preciso comprobar detalles, encontrar la forma de escribir y comunicar la idea. Es el clásico "¡Eureka!" de Arquímedes.

5. *Transformación:* el avance modifica de modo terminante el mundo mental del individuo que está pensando el problema. Antes de sumergirse en la bañera, Arquímedes no pensaba en el desplazamiento de agua de la manera que lo piensa luego de tener el chasquido cognitivo. Esa iluminación lo cambia y ya no va a volver a pensar igual que antes. Esta última etapa está marcada por una sensación muy fuerte de gozo y satisfacción personal.

Como síntesis de esta primera clase, describimos algunos de esos métodos, usando los problemas propuestos como ejemplo.

Algunas estrategias para resolver problemas

Estas estrategias las dividimos en dos grupos. Un primer grupo de estrategias relacionadas con buenos hábitos del pensamiento y del hacer y otro grupo de estrategias que son propias del pensamiento matemático. De todas maneras esta división –que tiene una intención de organizar y ordenar– es discutible porque algunas estrategias podrían corresponder tanto a uno como a otro grupo.

Buenos hábitos del pensar y el hacer

Estos hábitos son aplicables, en realidad, a cualquier proceso de resolución de un problema, no necesariamente matemático. En general cuando se menciona la palabra problema se la tiende a asociar a matemática, pero en realidad puede haber problemas en una multiplicidad enorme de disciplinas. Prácticamente cualquier disciplina se puede pensar en términos de problemas a resolver.

1. **Volver a leer**: leer la consigna de un problema varias veces, antes y después de comenzar a resolverlo, para asegurarnos de comprenderla.

    - Ejemplo: en el Problema 1 recibieron instrucciones de un compañero para realizar un dibujo. Leer las instrucciones varias veces puede haber ayudado a realizar la construcción. En una segunda o tercera lectura se entienden detalles que en la primera lectura a veces se pierden. Esto pasa también cuando una consigna es más enredada, como sucede en el Problema 8.

2. **Revisar una solución**: a veces leemos el enunciado de un problema y, para responder al mismo, realizamos un dibujo o algún cálculo y luego obtenemos una respuesta. ¿Cumple esa respuesta con todo lo que se pedía en el enunciado? Releer el enunciado con la respuesta a la vista, para controlar que no haya contradicciones.

    - Ejemplo: Las instrucciones del Problema 1 indicaron cómo realizar una construcción. Después de realizar la construcción, es importante volver a leer las instrucciones, comparando con la construcción realizada, para ver si se han respetado todos los detalles de las instrucciones.

    - Otro ejemplo: En el Problema 8, después de algunos razonamientos, se puede deducir un día de la semana, que es la respuesta del problema. Una vez que se ha identificado el día, conviene volver a leer el diálogo de Patrick y su vecino, para chequear que el diálogo pueda tener lugar ese día y que no haya contradicciones.

3. **Resolver a partir del error**: Utilizar las soluciones que resultaron falsas para construir una mejor. Es decir: errar y corregir, en vez de hacer borrón y cuenta nueva. Un mal hábito al resolver problemas consiste en tachar o borrar los errores. Por el contrario, cuando producimos una solución y descubrimos que el razonamiento está equivocado, conviene asignarle un “cartelito" que diga *Primer intento* y volver a intentarlo. La solución incorrecta puede aportar información útil y aprovechable para avanzar hacia la solución definitiva.

    - Ejemplo: en el Problema 8 podemos suponer que hoy es lunes. Enseguida veremos que esa suposición es incorrecta, porque, como el vecino de Patrick dice la verdad los días lunes, no podría responder que hoy es sábado (pues estaría mintiendo un lunes). ¿Es un error que debemos ocultar, borrar o tachar, el haber supuesto que la respuesta al problema era “hoy es lunes”? ¡De ninguna manera! Nos ha servido para comprender que hoy no es lunes. Aunque no sabemos aún TODA la verdad, sabemos ALGO que es verdad: ¡hoy no es lunes! Estamos mejor que antes de comenzar a resolver el problema. Por eso las respuestas equivocadas pueden ser muy útiles y no deben dejar de considerarse.

4. **Identificar casos similares**: A veces en un problema debemos considerar muchas posibilidades. Pero puede ocurrir que algunas posibilidades sean tan parecidas entre sí que alcance con analizar una sola de ellas para poder decir que todas las demás llevarán a la misma conclusión. Cuando uno puede clasificar estos casos parecidos, ahorra esfuerzo porque no necesita analizar cada uno de ellos.
   - Ejemplo: En el ejemplo anterior, acerca del Problema 8, se mostró un razonamiento que servía para justificar que hoy no puede ser lunes. Como el vecino de Patrick dice la verdad los lunes, nunca un lunes podrá decir que es sábado. Pero el mismo razonamiento vale para los miércoles, viernes y domingos, pues en esos días el vecino de Patrick también dice la verdad. Entonces no hace falta desarrollar la deducción en detalle: por la misma razón que hoy no puede ser lunes, tampoco puede ser miércoles, viernes ni domingo. Ahora la respuesta quedó reducida a tres casos posibles: es martes, es jueves o es sábado.

5. **Escribir ordenadamente**: Todo lo que escribamos en la resolución de un problema tiene que poder ser leído por otros ¡y por nosotros mismos! Los cálculos y dibujos no deben hacerse en cualquier lugar de la hoja en el que haya espacio. Hay que pensar que quien lo lea, siempre leerá de izquierda a derecha y de arriba a abajo y considerará que el texto fue escrito siguiendo ese orden. Si no somos cuidadosos y el desarrollo del problema es largo, nos puede llegar a pasar que ni nosotros mismos, después de unos días, podamos entender qué fue lo que quisimos escribir. Para ser claros es útil hacer listas numeradas con los pasos de la resolución (como la lista numerada que están leyendo en este apunte) y escribir utilizando todo el espacio que necesitemos, sin amontonar cálculos ni texto.
   - Ejemplo: En el Problema 1 habrán visto lo dificultoso que es recibir instrucciones poco claras o con letra poco legible. De hecho, uno de los principales objetivos de ese problema era convencerse de lo importante que es comunicarse con claridad.

6. **Utilizar terminología conveniente**: En matemática, como en cualquier disciplina, existe un vocabulario específico de conceptos que se definen con mucha precisión. La importancia de los nombres de las cosas es poder referirse a ellas para ser comprendido por otro.
   - Ejemplo: En el Problema 1 aparecieron seguramente algunos términos del campo de la geometría: segmento, recta, intersección, punto medio, paralelismo. Por supuesto, para que exista una comunicación clara, esos términos deben ser conocidos por el que escribe las instrucciones y por el que las va a leer.

7. **Ensayo y error**: Es similar a lo explicado en el punto 3 Se trata de proponer una solución, cuando es fácil chequear si la solución es correcta o no. Si no es correcta, se prueba con otra. Cuando el número de soluciones posibles es pequeño, se puede, por tanteo, ir intentando con todas las posibilidades hasta encontrar la correcta (en caso de que exista alguna).
   - Ejemplo: El ya mencionado Problema 8. En dicho problema hay solo 7 posibles respuestas (los siete días de la semana). Entonces, es posible ir proponiendo todos los días, uno por uno, porque descartar seis días no es una tarea muy larga y puede conducirnos a la solución. En algunos problemas puede ocurrir que haya infinitas soluciones posibles y el método de ensayo y error no sea muy conveniente.

Estrategias propias del pensamiento matemático

Estas estrategias si bien algunas pueden ser usadas en otras disciplinas y en otros campos del saber, son principalmente asociadas al pensamiento y al quehacer matemático.

8. **Analisis exhaustivo de casos:** Como dice Smullyan en uno de sus libros de problemas lógicos (ver bibliografía: [20]): *Frente a un problema, una vez que todo lo imposible ha sido descartado, lo que quede forzosamente debe ser la verdad.* Una estrategia muy usada en matemática es ir analizando casos de un problema uno por uno hasta agotar todas las posibilidades. Vamos a analizar el Problema 2 combinando también la siguiente técnica clásica de la matemática.

9. **Reducir al absurdo**: La reducción al absurdo consiste en demostrar que una afirmación es verdadera, asumiendo inicialmente que es falsa y llegar a una contradicción con las hipótesis que la sostienen. Como la afirmación sólo admite dos opciones excluyentes, o es verdadera o es falsa, si el suponer que es falsa lleva a incongruencias y absurdos matemáticos no nos queda otra opción que darla por verdadera.

   - Ejemplo: El Problema 2 se puede resolver mediante un razonamiento por el absurdo, de la siguiente manera:

     - La primera cuenta es $6 + 8 = 14$, que es correcta. Por lo tanto pueden pasar dos cosas: las teclas 6 y 8 funcionan bien o la calculadora intercambia las teclas 6 y 8 (es decir, al presionar 6 pone 8 y al presionar 8 pone 6). NO HAY NINGUNA OTRA ALTERNATIVA POSIBLE DISTINTA DE ESTAS DOS.

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\text{Caso 1: teclas correctas}} \\
6 & + & 8 & = & 14 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
6 & + & 8 & = & 14
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\text{Caso 2: teclas cruzadas}} \\
6 & + & 8 & = & 14 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
8 & + & 6 & = & 14
\end{array}$$

     - Ahora viene la suposición: supongamos que las teclas 6 y 8 funcionan bien (Caso 1). La segunda cuenta es $2 + 5 + 6 = 15$, que es falsa, pues en realidad es $2 + 5 + 6 = 13$. Como estamos suponiendo que la tecla 6 funciona bien, el error debe venir de la tecla 2 o de la tecla 5 (Y NO HAY OTRA ALTERNATIVA POSIBLE).

     - Si el error viene de la tecla 2, para que sea $2+5+6 = 15$ la tecla 2 debería intercambiarse con la tecla 4. Si el error viene de la tecla 5, para que sea $2+5+6 = 15$ la tecla 5 debería intercambiarse con la tecla 7:

$$\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{8}{c}{\text{Caso 1a: teclas 2 y 4 cruzadas}} \\
2 & + & 5 & + & 6 & = & 15 & \text{Incorrecto} \\
\downarrow & & & & & & & \\
4 & + & 5 & + & 6 & = & 15 & \text{Correcto} \\
\multicolumn{8}{c}{\text{Caso 1b: teclas 5 y 7 cruzadas}} \\
2 & + & 5 & + & 6 & = & 15 & \text{Incorrecto} \\
 & & \downarrow & & & & & \\
2 & + & 7 & + & 6 & = & 15 & \text{Correcto}
\end{array}$$

     - Veamos ahora la tercera cuenta: $1 + 2 + 3 + 8 = 12$. Esta cuenta es incorrecta. Pero estamos suponiendo que se da el Caso 1 y, por lo tanto, el Caso 1a o bien el Caso 1b. Según el Caso 1a, el 2 vale 4 y tenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{9}{c}{\text{Caso 1a}} \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & 8 & = & 12 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
1 & + & 4 & + & 3 & + & 8 & = & 12
\end{array}$$

       Pero así, la tercera cuenta es también incorrecta, pues en realidad es $1 + 4 + 3 + 8 = 16$. Por lo tanto el Caso 1a es absurdo. Nos queda la esperanza del Caso 1b. Según este caso, el 5 vale 7 y todas las demás teclas funcionan bien. Pero entonces la tercera cuenta es exactamente lo que dice: $1+2+3+8 = 16$ y es incorrecta. Así, el Caso 1b es también absurdo.

     - Pero los Casos 1a y 1b se desprendían, como únicas posibilidades, del Caso 1. Por lo tanto, el Caso 1 es absurdo y solo queda la posibilidad de que valga el Caso 2: las teclas 6 y 8 están intercambiadas.

     - Pueden verificar que esta posibilidad no produce errores en las cuentas segunda y tercera. Por lo tanto, es la respuesta correcta del problema (¡Y la única posible, ya que las demás se han descartado, reduciéndolas al absurdo).

A lo largo de este taller permanentemente estarán en la situación de tener que resolver un problema nuevo. Un buen aprendizaje que esta primera clase puede dejar es el de tener presente la lista de estrategias que acaban de leer. Algunas formas posibles de aprovecharla:

- Recurrir a ella cuando estén paralizados frente a un problema y no sepan qué rumbo tomar. Tal vez alguna idea ayude a destrabar la situación.
- Cada vez que resuelvan un problema pueden mirar la lista y reflexionar: ¿Usé alguna de estas estrategias? ¿De qué manera lo hice?
- Enriquecer la lista de estrategias: tal vez al resolver un problema pueden identificar el uso de otra estrategia que aquí no fue mencionada. ¡Anótenla! Hagan crecer la lista para que resulte cada vez más completa y más útil. Si pueden, acompáñenla también con el ejemplo que ha dado lugar a la formulación de esa estrategia.

Producción de fórmulas

Los distintos problemas de esta sección se propusieron con dos objetivos fundamentales:

1. Mostrar lo valioso que puede resultar encontrar una fórmula para modelizar[4] una situación y estudiarla en detalle.
2. Aprender a trabajar con expresiones algebraicas, es decir, expresiones en las que intervienen letras que, en estos casos, representan números.

Vamos a desarrollar una explicación de algunos conceptos, apoyándonos en un ejemplo trabajado durante la clase. Consulten el Problema 24 del cuadernillo. La explicación que sigue es acerca de ese problema y conviene tenerlo a la vista.

Como sucede siempre, para resolver cualquier problema, lo primero que tenemos que hacer es familiarizarnos con él. Para esta parte conviene siempre leer varias veces el enunciado hasta estar seguros de que hemos entendido cuál es el problema en cuestión. También de ser posible nos ayudará mucho hacer dibujos o cualquier tipo de anotaciones que nos sirvan para entender qué es lo que queremos resolver.

En este caso, el problema ya viene con dibujos que nos ayudan a entender la situación planteada. Para asegurarnos de entenderlo consideraremos algunas preguntas que nos puedan guiar.

(a) **Cuenten el número de personas que están sentadas alrededor de una mesa, las que están sentadas en una hilera de 2 mesas y las que están sentadas en una hilera de 3 mesas. ¿Qué cuenta harían para calcular el número máximo de personas que puede sentarse en una hilera de 5 mesas? ¿Y en una hilera de 6 mesas? Escriban las dos cuentas y compárenlas. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?**

En esta pregunta nos piden contar la cantidad máxima de personas que pueden sentarse en una hilera de 2 mesas, 3 mesas, 5 mesas y 6 mesas. ¿Cómo podemos hacer? Como la cantidad de mesas es pequeña y, de hecho, ya tenemos en el mismo enunciado del problema los dibujos que quedan para una hilera de 2 o 3 mesas, ¡podemos aprovecharlos!

[4] Si bien los términos modelizar, modelización, etc. no figuran entre las palabras castellanas admitidas por la RAE [66], su uso en el sentido que le damos aquí está ya muy extendido y no lo negaremos.

Contando los puntitos (personas) en los dibujos que tenemos, podemos ver que en el caso de 2 mesas la cantidad máxima de personas es 10 y para el caso de 3 mesas la cantidad máxima de personas es 14. ¿Nos dicen algo estos números aislados?

Como dijimos anteriormente, para el caso de 5 y 6 mesas, aunque no tenemos los dibujos correspondientes, observando en detalle los de 2 y 3 mesas podemos realizar los dibujos correspondientes a las 5 y 6 mesas, para luego contar en ellos esta cantidad máxima. ¿Los pudieron hacer? Al realizarlos encontramos que para el caso de 5 mesas la cantidad máxima es 22 personas y para el caso de 6 mesas la cantidad máxima es de 26 personas.

Notemos que en estos casos, para poder responder las preguntas que nos propusimos, nos alcanzó con hacer los dibujos correspondientes (¡bien hechos!) y contar los puntitos que representan las personas. ¿Siempre nos alcanzará con un procedimiento así? Pensemos esta otra pregunta:

(b) **¿Cuántas personas podrán sentarse, como máximo, si se hace una hilera de 15 mesas? Intenten explicar la manera en que organizan el conteo. ¿Se pueden aprovechar las cuentas del ítem anterior?**

En este caso la pregunta es la misma, pero ahora para una cantidad de mesas igual a 15. Ya el número de mesas es más grande y necesitaremos más papel si queremos seguir con el método anterior. De todos modos podemos hacerlo: 15 mesas no nos llevarán mucho más tiempo. De hecho, podemos usar ya el dibujo que tenemos de 6 mesas y agregar 9 mesas más, ¿lo hacemos?

Sabemos que con un poco de paciencia y papel podemos resolver este punto del problema de la misma manera que los anteriores. Pero supongamos que no disponemos de tanto tiempo y queremos simplificar un poco el trabajo...

Observemos con más cuidado los datos que tenemos hasta el momento:

1 mesa $\longrightarrow$ máximo: 6 personas

2 mesas $\longrightarrow$ máximo: 10 personas

3 mesas $\longrightarrow$ máximo: 14 personas

4 mesas $\longrightarrow$ máximo: ?

5 mesas $\longrightarrow$ máximo: 22 personas

6 mesas $\longrightarrow$ máximo: 26 personas

¿Notaron algo cuándo hicimos este resumen de los datos que tenemos? Si miramos en detalle los números máximos son: 6, 10, 14, ?, 22, 26 ... ¿tienen alguna particularidad? Hernán mira la secuencia y dice: “Parecieran ir de 4 en 4”. Si esto fuese válido ¿cuántas personas como máximo se podrían sentar en una hilera de 4 mesas? Para asegurarnos esto nos conviene completar el caso de una hilera de 4 mesas haciendo el dibujo ¿cuánto nos tendría que dar? ¿y qué pasa? Hacemos el dibujo y contamos los puntitos y efectivamente la cantidad máxima para 4 mesas es 18, es decir que nos quedó la siguiente secuencia:

1 mesa $\longrightarrow$ máximo: 6 personas

2 mesas $\longrightarrow$ máximo: 10 personas

3 mesas $\longrightarrow$ máximo: 14 personas

4 mesas $\longrightarrow$ máximo: 18 personas

5 mesas $\longrightarrow$ máximo: 22 personas

6 mesas $\longrightarrow$ máximo: 26 personas

Pareciera entonces que esta secuencia, tal como lo dijo Hernán, efectivamente va de 4 en 4, empezando con el valor de 6, cuando se dispone de 1 sola mesa. Ahora... ¿esto nos alcanza para asegurar que efectivamente va de 4 a 4? Si fuera así ¿cuántas personas se podrán sentar como máximo en una hilera de 15 mesas?

Hacemos la secuencia:

1 mesa ⟶ máximo: 6 personas
2 mesas ⟶ máximo: 10 personas
3 mesas ⟶ máximo: 14 personas
4 mesas ⟶ máximo: 18 personas
5 mesas ⟶ máximo: 22 personas
6 mesas ⟶ máximo: 26 personas
7 mesas ⟶ máximo: 30 personas
8 mesas ⟶ máximo: 34 personas
9 mesas ⟶ máximo: 38 personas
10 mesas ⟶ máximo: 42 personas
11 mesas ⟶ máximo: 46 personas
12 mesas ⟶ máximo: 50 personas
13 mesas ⟶ máximo: 54 personas
14 mesas ⟶ máximo: 58 personas
15 mesas ⟶ máximo: 62 personas

Si esta regularidad que observamos es válida entonces para el caso de una hilera de 15 mesas el número máximo de personas es 62. Ahora, siempre hay alguien desconfiado, por ejemplo Mariana, que viene y nos dice: "Mirá la verdad que yo no encuentro convincente tu manera de explicarlo, así que prefiero hacer el dibujo y contarlas". Y la verdad es que si uno no está convencido de algo, siempre es mejor asegurarse por otro camino. Mariana se va a dibujar sus 15 mesas, viene y dice "A mí también me dio que el número máximo es 62 personas". Con estos dos caminos distintos que llevaron al mismo resultado... parece más razonable pensar que efectivamente puede ser cierto esto de que la cantidad máxima de personas va de a 4 en 4... pero ¿nos alcanza con esto? Hasta ahora no hemos encontrado una manera de justificarlo. Simplemente de la observación ha salido esa conjetura que apoyada por los dibujos realizados, inclusive en el de Mariana, pareciera ser cierta. **Hay que rescatar en esta parte que nos sirvió muchísimo para poder arribar a esta posible solución, tener anotados los datos obtenidos de una manera ordenada.**

Ahora, ¿cómo podemos hacer para convencer a Mariana de que efectivamente nuestra cuenta resuelve el problema?

Teniendo solamente los numeritos anotados, pareciera que no podremos lograr nuestro objetivo. Pero... ¿De dónde vinieron estos numeritos? Intentemos deducirlo mirando el dibujo e intentando tener el mismo orden de recuento en todos los casos. Viene Érica y nos muestra lo siguiente:

1 mesa ⟶ máximo: 6 personas = 4 en los bordes + 2 en las puntas
2 mesas ⟶ máximo: 10 personas = 8 en los bordes + 2 en las puntas
3 mesas ⟶ máximo: 14 personas = 12 en los bordes + 2 en las puntas
4 mesas ⟶ máximo: 18 personas = 16 en los bordes + 2 en las puntas
5 mesas ⟶ máximo: 22 personas = 20 en los bordes + 2 en las puntas
6 mesas ⟶ máximo: 26 personas = 24 en los bordes + 2 en las puntas

Mariana, la mira, y dice "Claro, siempre en las puntas van 2, hasta ahí te sigo." Pero pregunta: "¿de dónde salen los otros números que van aumentando cuando aumenta la cantidad de mesas?" Por otro lado, viene Mauro, con el siguiente detalle de sus cuentas:

1 mesa ⟶ máximo: 6 personas = $4 \cdot 1$ en los bordes + 2 en las puntas
2 mesas ⟶ máximo: 10 personas = $4 \cdot 2$ en los bordes + 2 en las puntas
3 mesas ⟶ máximo: 14 personas = $4 \cdot 3$ en los bordes + 2 en las puntas
4 mesas ⟶ máximo: 18 personas = $4 \cdot 4$ en los bordes + 2 en las puntas

5 mesas $\longrightarrow$ máximo: 22 personas = $4 \cdot 5$ en los bordes + 2 en las puntas

6 mesas $\longrightarrow$ máximo: 26 personas = $4 \cdot 6$ en los bordes + 2 en las puntas

Érica lo mira y le dice "Claro, te da lo mismo que a mí." ¿Qué ventaja tiene la escritura de Mauro? Mauro le responde: "Sí, pero en vez de contar todos los puntitos de los bordes, yo sé que en cada mesa entran como máximo 4 personas y entonces sabiendo la cantidad de mesas, sé cuántas personas se podrán sentar como máximo." ¡Suena muy convincente el argumento! Mariana interrumpe y dice: "Claro, entonces agregando una mesa, se agregan 4 personas como máximo, ¡como había dicho Hernán antes!, igual yo me quedo con el dibujo." Y la dejamos tranquila ¡por suerte!

Ahora que estamos todos tranquilos pensemos en una pregunta más general:

(c) **Construyan una fórmula que permita calcular cuántas personas podrán sentarse para cada cantidad posible de mesas.**

Mariana lee la pregunta y se cuestiona "Ahora no voy a poder resolverlo dibujando." Y está en lo cierto, porque ahora la cantidad de mesas podría ser 15, como 28, como 54 y en realidad debemos resolverlo para cualquier cantidad. Es decir, ¡Mariana jamás terminaría de dibujar!

Mauro los mira a todos y dice: "Creo que ya sé como hacerlo, usemos lo que tengo yo hasta ahora" Volvemos a mirar en más detalle lo que tiene Mauro anotado:

1 mesa $\longrightarrow$ máximo: 6 personas = $4 \cdot 1$ en los bordes + 2 en las puntas

2 mesas $\longrightarrow$ máximo: 10 personas = $4 \cdot 2$ en los bordes + 2 en las puntas

3 mesas $\longrightarrow$ máximo: 14 personas = $4 \cdot 3$ en los bordes + 2 en las puntas

4 mesas $\longrightarrow$ máximo: 18 personas = $4 \cdot 4$ en los bordes + 2 en las puntas

5 mesas $\longrightarrow$ máximo: 22 personas = $4 \cdot 5$ en los bordes + 2 en las puntas

6 mesas $\longrightarrow$ máximo: 26 personas = $4 \cdot 6$ en los bordes + 2 en las puntas

Los 4 miran las anotaciones que hizo Mauro, intentando deducir qué es lo que está pasando. Vamos a escribir el hecho más resumidamente:

1 mesa $\longrightarrow 4 \cdot 1 + 2$

2 mesas $\longrightarrow 4 \cdot 2 + 2$

3 mesas $\longrightarrow 4 \cdot 3 + 2$

4 mesas $\longrightarrow 4 \cdot 4 + 2$

5 mesas $\longrightarrow 4 \cdot 5 + 2$

6 mesas $\longrightarrow 4 \cdot 6 + 2$

Érica y Hernán, como prefieren trabajar solos, abandonan a sus compañeros y se van a pensar por su cuenta. Mauro y Mariana se quedan analizando estos datos. Mariana dice "En todos los casos sumamos 2 al final que son los dos que se sientan en las puntas." Entonces empiezan a escribir:

$$\text{Cantidad máx. de personas } = \nabla + 2 \text{ personas}$$

Mauro propone "Y si sacamos las de las puntas pueden ser como máximo 4 personas por mesa: ése es el 4 que aparece primero en todas las anotaciones". Mariana piensa, mirá un poco más las anotaciones de Mauro y dice: "Claro, y el número que multiplica al 4 es la cantidad de mesas, porque en cada mesa se pueden sentar, como dijiste, 4 personas." Contentos anotan entonces:

$$\text{Cantidad máx. de personas } = 4 \cdot \text{mesas} + 2 \text{ personas}$$

Mauro le dice: "Entonces la fórmula nos quedaría":

$$\text{Personas } = 4 \cdot \text{mesas} + 2$$

o, si queremos escribir menos,

$$P = 4 \cdot M + 2$$

Al rato viene Érica y dice contenta: "tengo la fórmula es $P = 6.M - 2 \cdot (M - 1)$". Mariana salta enseguida y le dice que no es correcta, pero Érica insiste en que su razonamiento fue correcto y les cuenta: "Lo que yo pensé es que en cada mesa se pueden sentar como máximo 6 personas, eso lo anoté como $6.M$, esto ocurriría si las mesas no estuvieran pegadas y todas tuvieran 2 personas en las puntas. Pero, al estar pegadas, tengo que restar 2 por cada una de esas *pegaduras*. Y tengo $M - 1$ *pegaduras*." Mariana se marea con esta explicación, sin embargo Mauro parece que ha entendido y se pone a pensar un poco más...

Mauro empieza a jugar con las expresiones y va anotando lo siguiente en su cuaderno:

$P = 6 \cdot M - 2 \cdot (M - 1)$

$P = 6 \cdot M - 2 \cdot M + 2$

$P = 4 \cdot M + 2$

Y grita "¡Lo tengo! Ya pude pasar de tu fórmula a la mía, lo único que hay que usar es la **propiedad distributiva**."

Como ha pasado en este ejemplo, una misma fórmula puede tener muchas maneras, en principio diferentes, de ser escrita. Pero eso no significa que no sean correctas, sino que dependen de la manera en que se organizó el conteo. ¿Se les ocurren otras maneras de organizar el conteo que nos den otra escritura de esta misma fórmula? ¿Pueden recordar alguna que haya aparecido en la clase, mirando sus apuntes?

Hernán estaba pensando, viene y dice "Yo también tengo la fórmula: me quedó

$$P = 4 \cdot (M - 2) + 8"$$

Aprendiendo del hecho anterior que diferentes escrituras pueden representar la misma fórmula, se ponen a analizarla...

Mauro, como siempre, intenta jugar con la fórmula y las propiedades que recuerda. Mariana empieza a probar y dice lo siguiente: "Si tengo 1 mesa, nosotros ya sabíamos que se podían sentar como máximo

6 personas. Sin embargo, si reemplazamos M por 1 en la fórmula de Hernán y hacemos la cuenta nos queda $4.(-1) + 8 = 4$" y se pregunta "¿Sirve entonces esta fórmula?"

¿Qué significa que la fórmula en cuestión sirva o no? La fórmula debería darnos la cantidad máxima de personas para cada cantidad de mesas. Debería *funcionar bien* para cualquier cantidad de mesas. Sin embargo, Mariana ya ha descubierto que para una cantidad de mesas igual a 1 la fórmula ya no funciona. Por lo tanto, ya podemos decidir que no es una fórmula correcta: la fórmula no es confiable, porque hemos encontrar un caso en el cual no permite anticipar la cantidad de gente que se podrá sentar en una cantidad determinada de mesas (en este caso: una mesa).

Antes de pensar en otras preguntas que nos ayuden a comprender el problema, vamos a resumir algunos de los hechos que ayudaron a los chicos a llegar hasta acá.

En primer lugar, podríamos haber comenzado por pensar en la pregunta (c), pues las preguntas anteriores se pueden responder fácilmente una vez que tenemos la fórmula. Pero justamente las primeras preguntas ayudan a que veamos algunas recursos que se pueden usar a la hora de encontrar dicha fórmula. Esos recursos que usamos son:

- hacer dibujos;
- entender bien cómo se van formando los ejemplos para números chicos;
- tratar de escribir las cuentas lo más desglosadas posibles para encontrar patrones;
- anotar los datos de forma ordenada para buscar regularidades.

El Problema 24 original comienza con la pregunta "¿Cuántas personas podrán sentarse, como máximo, si se hace una hilera de 47 mesas?". Esta pregunta se responde inmediatamente si uno cuenta con la fórmula: si $P = 4 \cdot M + 2$ entonces en 47 mesas podrán sentarse como máximo $P = 4 \cdot 47 + 2 = 190$ personas. La pregunta se propuso antes de pedir la fórmula, precisamente porque darse cuenta de que la fórmula puede ser útil –y entonces dedicarse a buscarla– se pensó como parte de la resolución del problema.

Además también vimos que una misma fórmula puede tener diferentes escrituras, pero sin embargo estar representando lo mismo, en dicho caso diremos que las fórmulas o expresiones son equivalentes, aunque *a priori* parezcan distintas. La manera de pasar de una a la otra es usando algunas propiedades algebraicas, por ejemplo la propiedad distributiva que usó Mauro.

Recordemos de qué se trata esto en el ejemplo anterior. Mauro transformó la expresión

$$2 \cdot (M - 1)$$

en la expresión

$$2 \cdot M - 2$$

¿Por qué esto es válido? Para eso tenemos que recordar qué significa multiplicar dos números. Si recuerdan del colegio primario, la multiplicación es una manera de anotar una suma de manera más corta, así, por ejemplo, en vez de escribir $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, como lo que estamos haciendo es sumar 5 veces al número 4, lo anotamos $5 \cdot 4$, que simboliza lo que podemos leer como "5 veces 4".

Pasemos ahora a nuestro ejemplo:

La expresión $2 \cdot (M - 1)$ significa 2 veces $M - 1$. Si queremos escribir esto como suma es $(M - 1) + (M - 1)$, es decir $M - 1 + M - 1$, que también podemos escribir como $M + M - 1 - 1$. La parte que dice $M + M$, si la escribimos de forma resumida usando la multiplicación, nos queda $2 \cdot M$ y, por otro lado, $-1 - 1 = -2$, con lo cual queda efectivamente $2 \cdot M - 2$.

La propiedad distributiva es justamente eso, pasar de sumas a multiplicaciones o de multiplicaciones a sumas, agrupando las cantidades que están repetidas.

Veamos otro ejemplo (que está inventado para esta explicación, aunque ya no tiene nada que ver con las mesas y las personas sentadas):

¿Qué otras escrituras posibles tenemos para la expresión $3 \cdot (A - 2) + 4 \cdot (A + 1)$?

Transformamos las multiplicaciones en sumas y nos queda:

$$\underbrace{(A-2)+(A-2)+(A-2)}_{\text{3 veces}}+\underbrace{(A+1)+(A+1)+(A+1)+(A+1)}_{\text{4 veces}}=$$

$$=\underbrace{A+A+A}_{\text{3 veces}}+\underbrace{A+A+A+A}_{\text{4 veces}}-2-2-2+1+1+1+1=$$

$$= 7 \cdot A - 2.$$

Otra de las cosas que hemos aprendido es: si encontramos un valor para el cual la fórmula no funciona (porque no permite calcular lo que deseamos) entonces ya podemos concluir que esa fórmula no es correcta. ¿Cómo se hace eso? Antes de toda la justificación y de la teoría que permite asegurar, por ejemplo, que $2 \cdot (M - 1)$ es equivalente a $2 \cdot M - 2$, hay un hecho básico que nunca debemos perder de vista: las dos expresiones son equivalentes, porque cuando reemplazamos el valor de M por un mismo número, en cualquiera de las dos, obtenemos siempre el mismo resultado al resolver ambas cuentas. Vean, por ejemplo, esta tabla, en la que se comparan las fórmulas con distintos valores de M:

M	$2 \cdot (M-1)$	$2 \cdot M - 2$
1	$2 \cdot (1-1) = 0$	$2 \cdot 1 - 2 = 0$
2	$2 \cdot (2-1) = 2$	$2 \cdot 2 - 2 = 2$
27	$2 \cdot (27-1) = 52$	$2 \cdot 27 - 2 = 52$
-7	$2 \cdot (-7-1) = -16$	$2 \cdot (-7) - 2 = -16$

Si para algún valor de M las fórmulas dieran resultados distintos, eso aseguraría que no son equivalentes. Por el contrario, sin embargo, que dos fórmulas den el mismo resultado para *algunos* números, no permite asegurar –en principio, con los recursos matemáticos de los que disponemos hasta ahora– que darán el mismo resultado para todos los infinitos números posibles. Los ejemplos de la tabla anterior permiten *conjeturar* que las fórmulas $2.(M - 1)$ y $2 \cdot M - 2$ son equivalentes. La certeza de que lo son está en la propiedad distributiva.

Sigamos con las demás preguntas del Problema 24. En el punto b) se nos pregunta cuántas mesas necesitaremos para sentar a 134 personas. Ahora cambian los datos y las variables a conseguir. Antes, dada la cantidad de mesas, nos pedían hallar la cantidad máxima de personas, ahora nos dan una cantidad de personas y nos preguntan cuántas mesas necesitaremos. ¿Cómo podemos usar lo anterior para responder esta pregunta?

Mauro dice, "Tenemos la fórmula $P = 4 \cdot M + 2$" y ahora, en esa fórmula, sabemos que P es 134. Entonces escribe lo siguiente:

$$134 = 4 \cdot M + 2$$

Lo que queremos descubrir es cuál es el valor de M, es decir, queremos que la variable M quede solita de un lado (lo que técnicamente se llama **despejar** M). ¿Qué podemos hacer para lograr esto?

Lo primero es deshacernos del 2, para esto podemos restar 2 de ambos lados y nos queda: $134-2=4\cdot M+2-2$, es decir:

$$132=4\cdot M$$

Otra manera comprender lo mismo es pensarlo así: $134=4\cdot M+2$ significa que $4\cdot M$ es un número al que hay que sumarle 2 para llegar a 134. Por lo tanto $4\cdot M$ debe ser el número 132.

Y ahora, para lograr que quede M, solamente podemos dividir ambos lados por 4 con lo que obtenemos

$$\frac{132}{4}=\frac{4\cdot M}{4},$$

es decir:

$$33=M$$

Otra manera comprender lo mismo es pensarlo así: $132=4\cdot M$ significa que M es un número al que hay que multiplicarlo por 4 para llegar a 132. Por lo tanto M debe ser el número $132:4$, que también puede escribirse como $\frac{132}{4}$ o directamente como 33.

Con lo cual resulta que necesitaremos 33 mesas para sentar 134 personas.

Observen que si el problema fuera al revés y nos preguntaran cuántas personas como máximo pueden sentarse alrededor de 33 mesas, usaríamos la fórmula $P=4\cdot M+2$ con $M=33$ y obtendríamos:

$P=4\cdot 33+2$

$P=132+2$

$P=134$

Es decir, una vez obtenida la solución, es fácil (¡y muy importante!) verificar que la solución funciona bien.

Pasemos a la siguiente pregunta, es decir a la pregunta c). Mariana dice "Hacemos lo mismo que recién, pero, en vez de poner 134 ponemos 239." Veamos entonces qué queda en este caso:

$$\begin{aligned} 4\cdot M+2&=239\\ 4\cdot M&=239-2=237 \text{ (Restando 2)}\\ M&=\frac{237}{4} \text{ (Dividiendo por 4)}\\ M&=59,25 \end{aligned}$$

¿Lo hemos resuelto? Si la ecuación anterior estuviese fuera de un contexto, entonces tranquilamente el valor de M podría ser $59,25$. Pero en este contexto ¿qué representa M? En este problema M representa la cantidad de mesas y claramente no podemos partir una mesa. Es decir, debemos tener, en este contexto, una cantidad entera. Pero... ¿y entonces...? ¿Cuánto sería M? Mariana dice que 59. Hernán dice, "A ver si eso sirve..." y reemplaza en la fórmula de Mauro y obtiene:

$$4\cdot 59+2=238$$

Con lo cual concluyen que con 59 mesas alcanzan para que se siente un máximo de 238 personas y, por lo tanto, no alcanzan para 239. Eso suena totalmente razonable, pues el resultado 59,25 obtenido es más grande que 59. Entonces Mauro dice: “Como el resultado es más grande que 59, necesitaremos 60 mesas, ya que el valor tiene que ser un entero mayor a 59,25.”

Lo chequeamos:

$4 \cdot 60 + 2 = 242$, es decir que con 60 mesas podrán sentarse como máximo 242 personas. Nosotros queríamos sentar a 239 personas, así que nos alcanzan 60 mesas y no necesitamos más mesas. Y con esta misma cuenta ya podemos decir que los lugares que sobran son $242 - 239 = 3$.

Con estas preguntas tenemos que recordar que, si bien muchas veces alcanza con despejar el valor en la ecuación que tenemos, a veces ese resultado no responde a la pregunta del problema, debido al contexto de esas variables. En este caso de mesas y personas, tanto mesas como personas deberán ser cantidades enteras.

Ahora te dejamos la pregunta d) (ver página 18) para que puedas responderla usando todos estos recursos.

Para que puedan repasar las propiedades que fueron surgiendo en estos problemas (Sección 2. Producción de fórmulas), les dejamos este breve resumen:

- Propiedad distributiva:

$$A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D$$

- Propiedad distributiva doble

  Ésta no es ninguna propiedad nueva, solamente es utilizar dos veces la propiedad distributiva anterior.

$$(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D \tag{12.1}$$

- Cuadrado de una suma

  Ésta tampoco es una propiedad nueva, es solamente reemplazar correctamente en la propiedad anterior, recordando que elevar al cuadrado algo no es otra cosa que multiplicarlo por sí mismo.

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A + B) \cdot (A + B)\\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B\\ &= A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2\end{aligned}$$

- Cuadrado de una resta

  Se deduce también de la propiedad (12.1), similarmente a lo que hicimos antes.

$$\begin{aligned}(A-B)^2 &= (A - B) \cdot (A - B)\\ &= A \cdot A - A \cdot B - B \cdot A + B \cdot B\\ &= A \cdot A - A \cdot B - A \cdot B + B \cdot B\\ &= A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2\end{aligned}$$

Además, todas estas expresiones se pueden escribir, sin usar el símbolo "$\cdot$" para indicar la multiplicación. Por ejemplo, se puede escribir, en vez de $3 \cdot M$, simplemente $3M$. Y no solo se puede escribir así, sino que, en realidad, es la forma más habitual de hacerlo. Así lo encontrarán escrito en la mayoría de los libros y de apuntes de matemática que se encontrarán a lo largo de la carrera. De esta manera, las fórmulas anteriores quedan así:

$$A(B + D) = AB + AD$$

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

- ¿Cuánto es $-(M - 8)$?

  Un signo menos delante de un paréntesis es una forma abreviada de escribir que la expresión encerrada por el paréntesis está multiplicada por -1, es decir que:

  $-(M - 8) = (-1)(M - 8)$ y ahora podemos aplicar la propiedad distributiva y nos queda:

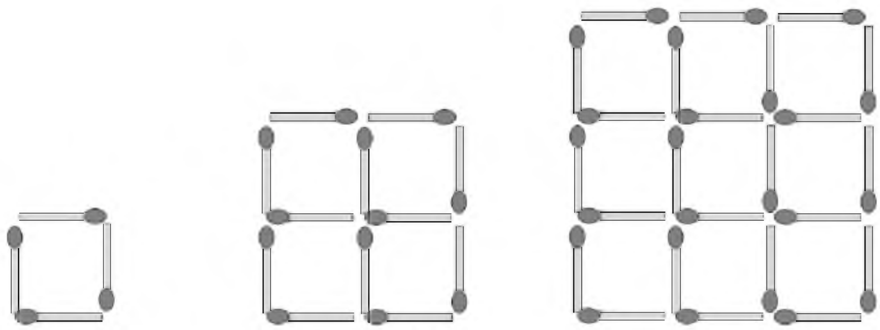
  $-(M - 8) = (-1)(M - 8) = (-1)M + (-1)(-8) = -M + 8$, con lo cual $-(M - 8) = -M + 8$

Como dijimos antes, más allá de todo el procedimiento técnico, las fórmulas

$$-(M - 8) \text{ y } -M + 8$$

son equivalentes, ante todo, porque para iguales valores de M en ambas se obtienen siempre iguales resultados. Esto no debe perderse de vista, porque chequearlo permite descubrir errores, en caso de que nos equivoquemos y utilicemos mal una propiedad.

Consideremos ahora el Problema 26. Haremos un análisis similar al que hicimos cuando nos encontramos con el Problema 24 de las mesas.



Cuadrado 1 × 1 Cuadrado 2 × 2 Cuadrado 3 × 3

La información sobre el número de fósforos que corresponde a cada diseño viene dada por el dibujo de los diseños. Mientras los dibujos estén a la vista, los fósforos se pueden contar "a mano".

Veamos, como antes, las otras formas de representar la información.

a) Mediante una tabla (ver Tabla A.1):

Lado del cuadrado	Fósforos
1	4
2	12
3	24
4	40
5	60
...	...

Tabla A.1: Esta tabla corresponde a la función que, al número de fósforos que forman un lado del cuadrado, le asigna el correspondiente número de fósforos necesarios para construir todo el diseño.

b) Otra forma de trabajo con el problema fue buscar una fórmula que dado el tamaño del cuadrado (en nuestro caso representado por la cantidad de fósforos que lo componen), calcule la cantidad total de fósforos que compone la figura.

Una de las estrategias para generar la fórmula puede ser descomponer la figura del cuadrado en otras tres figuras que sean más sencillas de contar en forma general. Ver Figura A.1

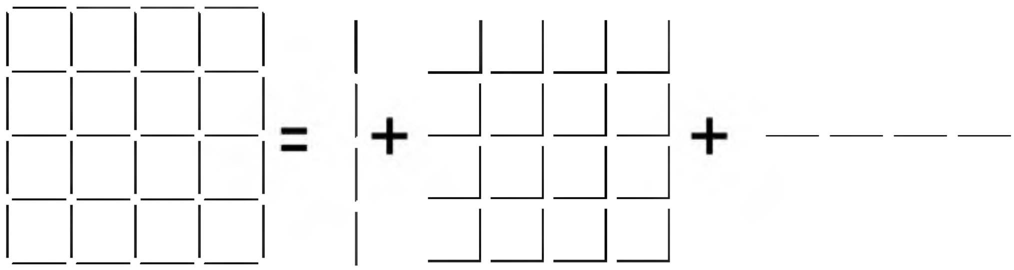


Figura A.1: Descomponiendo la figura para hallar una fórmula

De esta descomposición se puede ver que la pared vertical izquierda tiene 4 palitos en la figura A.1 pero en general tendrá n palitos para una figura de lado N. La tapa superior también está compuesta en la figura A.1 de 4 palitos, que corresponden a N en la general. Finalmente el resto de la figura está compuesta 4×4 pares de palitos, lo que en general corresponde a $N \times N$ pares de palitos. Sumando las tres cantidades obtenemos en general la formula

$$F = 2N^2 + 2N,$$

donde F es el número total de fósforos y N el número de fósforos que forman un lado del cuadrado.

Otra forma de pensar el cálculo de la fórmula consiste en descomponer la figura en los palitos que están en posición vertical, que en el caso de la figura A.2 son 5 columnas de 4 palitos cada una y en el caso general de un cuadrado de lado N, serán $N + 1$ columnas de N palitos cada una. La misma cuenta se aplica a los palitos que están en posición horizontal. Finalmente sumando ambas cantidades obtenemos $(N + 1)N + (N + 1)N = 2(N + 1)N = 2N^2 + 2N$

Si escribimos esto con el detalle con que se escribe formalmente una función, pondremos:

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} / g(x) = 2x^2 + 2x \qquad (12.2)$$

Lo que debe leerse como *la función g que a cada número natural x le asigna el número natural* $2x^2 + 2x$.

c) Mediante un gráfico (ver Figura A.3):

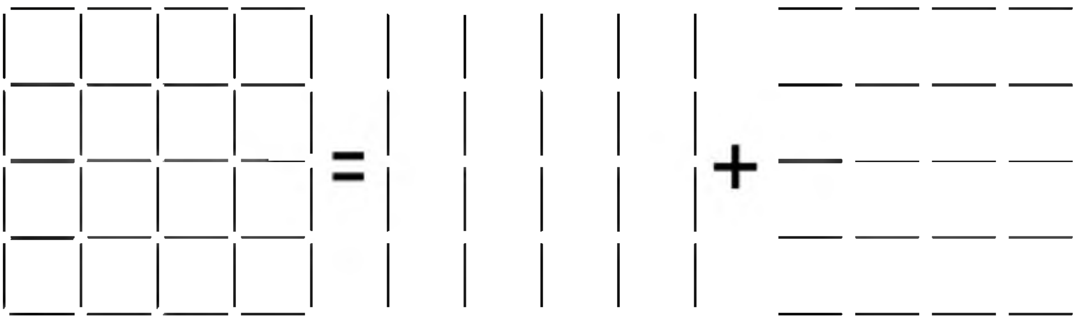


Figura A.2: Descomponiendo la figura para hallar una fórmula.

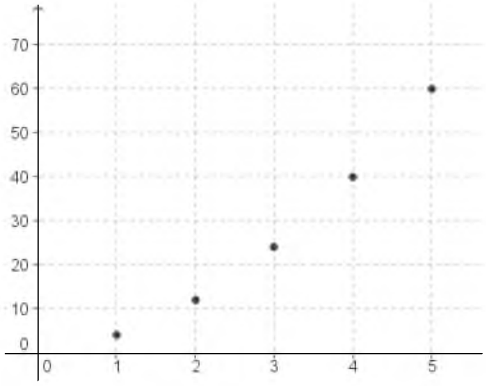


Figura A.3: El gráfico sólo tiene puntos aislados, pues en el contexto de este problema, el número de fósforos siempre debe ser entero positivo

Nuevamente, abandonando el contexto del problema, con los fósforos y los cuadrados, y pensando en esa función y en esa fórmula como aplicables a cualquier número (entero o no), obtenemos las siguientes variantes:

a) La función puede considerarse definida para cualquier número real. Si escribimos esto con el detalle con que se escribe formalmente una función, pondremos:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/g(x) = 2x^2 + 2x \tag{12.3}$$

Lo que no parece muy distinto a lo que teníamos antes, excepto porque ahora debe leerse como *la función g que a cada número real* x *le asigna el número real* $2x^2 + 2x$. Esto puede apreciarse de inmediato en las otras dos representaciones:

b) La tabla puede contemplar la posibilidad de introducir en ella cualquier número. Como antes, mostramos algunos ejemplos que involucran números racionales negativos o positivos, expresados mediante su desarrollo decimal o mediante una fracción (Ver la TABLA A.2).

c) Y nuevamente la posibilidad de aplicar la fórmula a números más cercanos entre sí provoca que el gráfico esté formado por puntos tan cercanos entre sí, que conviene representarlos con una línea continua, como se ve en la Figura A.4.

x	y
0	0
0,1	0,22
0,2	0,48
0,3	0,78
0,4	1,12
...	...
-5,2	43,68
-5,1	41,82
-5	40
-4,9	38,22
...	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{9}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{8}$
$-\frac{7}{5}$	$\frac{28}{25}$

Tabla A.2

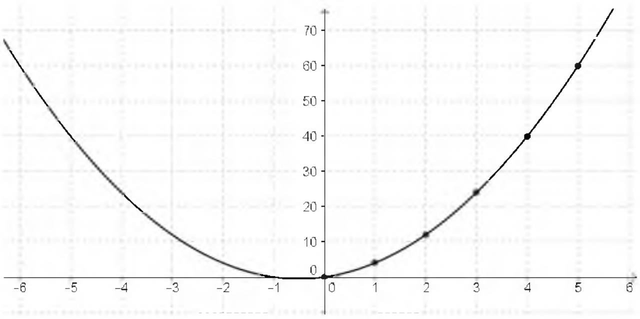


Figura A.4

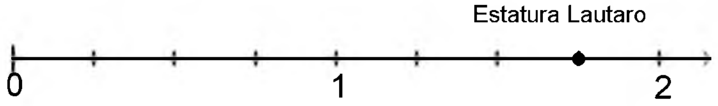
Fracciones

Existen muchas situaciones que no pueden modelizarse convenientemente si solo se dispone de los números enteros.

Ejemplo 1: La estatura de una persona adulta, medida en metros, suele ser un número mayor que 1 y menor que 2. Las siguientes son todas formas equivalentes de dar la misma información (aunque algunas se usan más que otras):

- Lautaro tiene una estatura de $1,75$ m.
- Lautaro tiene una estatura de 1 m con 75 cm.
- Lautaro tiene una estatura de 175 cm.
- Lautaro tiene una estatura de $(1+0,75)$ m.
- Lautaro tiene una estatura de $1\frac{3}{4}$ m.
- Lautaro tiene una estatura de $(1+\frac{3}{4})$ m.
- Lautaro tiene una estatura de $\frac{7}{4}$ m.
- Lautaro tiene una estatura de $\frac{175}{100}$ m.

- La estatura de Lautaro está representada en este gráfico, donde la unidad es el metro:



Ejemplo 2: Las siguientes son todas formas equivalentes de dar la misma información:

- En un negocio de mascotas, la quinta parte de los animales son gatos, la cuarta parte son perros y el resto de los animales son pájaros.
- En un negocio de mascotas, 1 de cada 5 animales es un gato, 1 de cada 4 animales es un perro y el resto de los animales son pájaros.
- En un negocio de mascotas, 20 de cada 100 animales es un gato, 25 de cada 100 animales es un perro y el resto de los animales son pájaros.
- En un negocio de mascotas, el 20 % de los animales es gato, el 25 % de los animales es perro y el resto de los animales son pájaros.
- En un negocio de mascotas, el 0,2 del total de animales es gato, el 0,25 es perro y el resto de los animales son pájaros.
- En un negocio de mascotas, $\frac{1}{5}$ de los animales son gatos, $\frac{1}{4}$ de los animales son perros y el resto de los animales son pájaros.
- En un negocio de mascotas, $\frac{20}{100}$ de los animales son gatos, $\frac{25}{100}$ de los animales son perros y el resto de los animales son pájaros.
- La Figura A.5 describe la proporción de gatos (blanco), perros (gris) y pájaros (negro), que hay entre los animales de un negocio de mascotas.

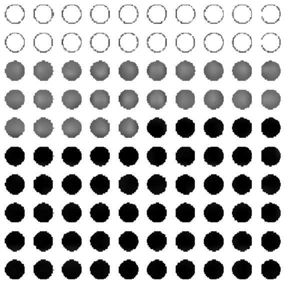
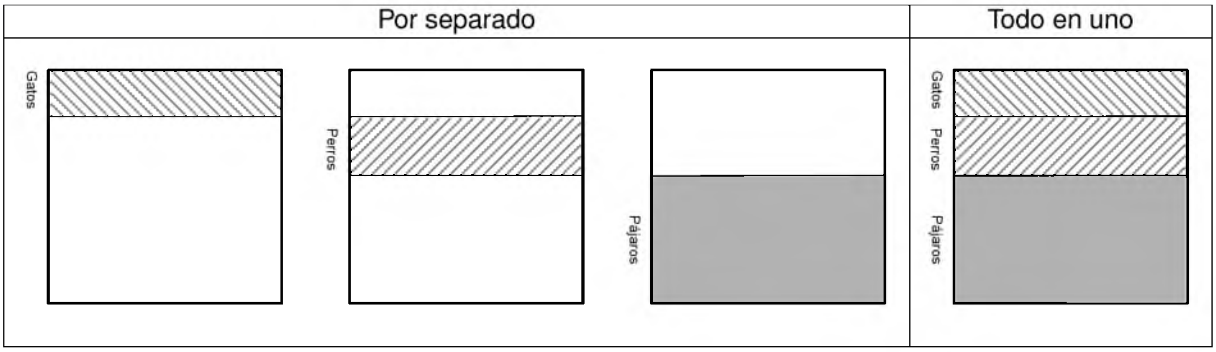
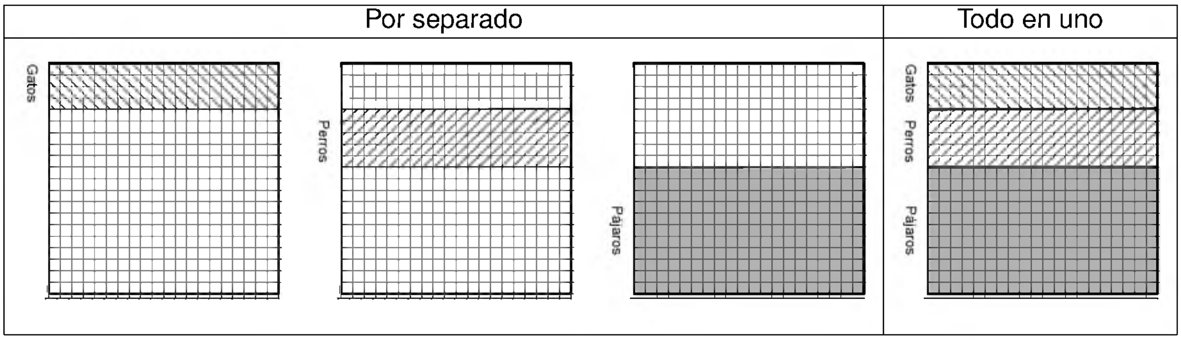


Figura A.5

- En la siguiente figura, si el cuadrado representa la totalidad de animales en el negocio, las partes sombreadas representan la parte de los animales de cada especie indicada.



- En un negocio de mascotas, $\frac{4}{20}$ de los animales son gatos, $\frac{5}{20}$ de los animales son perros y el resto de los animales son pájaros. Teniendo en cuenta esta forma equivalente de decirlo, se ha representado otra vez la totalidad de animales del negocio mediante un cuadrado. Ahora, además, se han dibujado los cuadrados sobre una base cuadriculada que los separan en partes iguales, más pequeñas (¿en cuántas?). Esto permite apreciar mejor, por qué las partes sombreadas representan la parte de los animales de cada especie indicada.



Ahora vamos a proponer algunas preguntas. Léanlas todas y recién después intenten responderlas.

a) ¿Alcanza la información para saber cuántos animales hay en el negocio?

b) ¿Alcanza la información para saber qué porcentaje del total de animales del negocio son mamíferos?

c) ¿Alcanza la información para saber qué porcentaje del total de animales del negocio no son gatos?

d) ¿Alcanza la información para saber qué fracción del total de animales del negocio son pájaros?

e) Si se sabe que en el negocio hay en total 140 animales, ¿cuántos perros, cuántos gatos y cuántos pájaros hay?

f) Decidan cuál de todas las formas equivalentes propuestas para dar la información ayuda mejor a responder cada pregunta.

Discutimos estas preguntas para comprender mejor el sentido de fracción. Vamos a tener presente todo el tiempo la pregunta f), justamente para pensar cada respuesta de la forma más sencilla que podamos.

Consideremos el ítem a). Sabemos que la quinta parte de los animales son gatos. O bien que uno de cada cinco animales es un gato. ¿Qué significa esto? ¿Podemos inventar un ejemplo que sirva para comprenderlo? Supongamos que hay 5 animales en total. La quinta parte de 5 es 1. Esto significa que, si en el negocio hubiera 5 animales en total, uno de ellos sería un gato. Pero también significa que, si hubiera 10 animales en total, 2 de ellos serían gatos. Y que si hubiera 100 animales en total, 20 de ellos serían gatos.

La información del enunciado nos dice qué *proporción* del total de animales es gato. **Pero no nos dice cuántos gatos hay porque no sabemos cuál es el total de animales**.

Vamos al punto b). Se supone que todos sabemos que los gatos y los perros son mamíferos y que los pájaros no lo son. ¿Qué porcentaje de los animales son mamíferos?

Ya vimos que es equivalente decir:

- 1 de cada 5 animales es gato.
- 2 de cada 10 animales es gato.
- 20 de cada 100 animales es gato.

Y que esto mismo se puede escribir mediante una fracción:

- $\frac{1}{5}$ de los animales es gato.
- $\frac{2}{10}$ de los animales es gato.
- $\frac{20}{100}$ de los animales es gato.

Estas tres fracciones son equivalentes:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100}$$

Una fracción está formada por dos números **enteros**. El de abajo se llama **denominador** y expresa el número de partes iguales en que se considera dividido un entero. El de arriba se llama **numerador** y expresa cuántas de esas partes iguales se están considerando. El denominador de una fracción siempre es distinto de 0 (cero).

Numerador

$$\frac{a}{b}$$

Denominador

Observen que cada fracción se puede obtener a partir de otra equivalente, multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número:

$$\overbrace{\frac{1}{5} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{2}{10} \underset{\times 10}{\overset{\times 10}{=}} \frac{20}{100}}^{\times 20}_{\times 20}$$

De todas estas fracciones equivalentes que expresan la proporción de gatos en el negocio, la que tiene denominador 100 es la que expresa la proporción que llamamos **porcentaje**, es decir, la que expresa cuántos de cada 100 de los animales son gatos.

Los gatos son $\frac{20}{100}$ (veinte centésimos) del total de animales. O bien, los gatos son el $20\,\%$ del total de animales.

Exactamente las mismas consideraciones se pueden hacer para los perros:

- 1 de cada 4 animales es perro.
- 2 de cada 8 animales es perro.
- 25 de cada 100 animales es perro.

Y escrito mediante una fracción:

- $\frac{1}{4}$ de los animales es perro.
- $\frac{2}{8}$ de los animales es perro.
- $\frac{25}{100}$ de los animales es perro.

Las fracciones equivalentes son:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{25}{100}$$

La proporción de mamíferos respecto del total de animales se obtiene sumando las proporciones de perros y de gatos:

$$\frac{\text{MAMÍFEROS}}{\text{TOTAL}} = \frac{\text{GATOS}}{\text{TOTAL}} + \frac{\text{PERROS}}{\text{TOTAL}}$$

Es decir:

$$\frac{\text{MAMÍFEROS}}{\text{TOTAL}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{20}{100} + \frac{25}{100} = \frac{45}{100}$$

Los mamíferos del negocio son 45 de cada 100 animales. O bien, son el $45\,\%$ de los animales del negocio. Cuenten ahora los puntos blancos y grises en la Figura A.5. Observemos que sabemos todo esto, sin conocer de ninguna manera la cantidad de animales que hay en el negocio.

Ya tenemos toda la información necesaria par responder la pregunta c): si el $45\,\%$ de los animales son mamíferos, el resto –los pájaros– se calcula como:

$$100\,\% - 45\,\% = 55\,\%$$

O bien, usando la notación de fracciones, como:

$$\frac{100}{100} - \frac{45}{100} = \frac{100-45}{100} = \frac{55}{100}$$

La proporción de animales que **no** son gatos se puede calcular ahora de dos maneras:

a) Como la suma de las proporciones de perros y pájaros:

$$\frac{25}{100}+\frac{55}{100}=\frac{80}{100}$$

Es decir,

$$25\,\%+55\,\%=80\,\%$$

b) Como el total de animales, menos la proporción de gatos:

$$\frac{100}{100}-\frac{20}{100}=\frac{80}{100}$$

Es decir,

$$100\,\%-20\,\%=80\,\%$$

También podemos responder la pregunta d). Esto se puede hacer de muchas maneras, pues esa proporción se puede representar con una infinidad de fracciones equivalentes. La que tenemos más a mano es la que expresa el porcentaje (una fracción con denominador 100). Acabamos de ver que el 55 % de los animales son pájaros. Por lo tanto, una fracción que da la proporción de pájaros es:

$$\frac{\text{PÁJAROS}}{\text{TOTAL}}=\frac{55}{100}$$

Pero, como se mostró antes, se pueden obtener muchas fracciones equivalentes. Por ejemplo:

$$\frac{55}{100}\underset{:5}{\overset{:5}{=}}\frac{11}{20}\underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}}\frac{22}{40}\underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}}\frac{66}{120}\underset{\times n}{\overset{\times n}{=}}\frac{\text{etc.}}{\text{etc.}}$$

En la pregunta e), por primera vez contamos con información sobre la cantidad concreta de animales.

Conociendo el total de animales y la proporción de cada animal respecto del total, se puede calcular cuántos animales hay de cada tipo.

Buscamos una fracción equivalente a las dadas, que tenga denominador 140:

(i) $\frac{1}{5}$ de los animales son gatos: $\frac{1}{5}\underset{\times 28}{\overset{\times 28}{=}}\frac{28}{140}$ O bien

(ii) $\frac{20}{100}$ de los animales son gatos: $\frac{20}{100}\underset{\times 1,4}{\overset{\times 1,4}{=}}\frac{28}{140}$

(iii) $\frac{1}{4}$ de los animales son perros: $\frac{1}{4}\underset{\times 35}{\overset{\times 35}{=}}\frac{35}{140}$ O bien

(iv) $\frac{25}{100}$ de los animales son perros: $\frac{25}{100}\underset{\times 1,4}{\overset{\times 1,4}{=}}\frac{35}{140}$

(v) $\frac{55}{100}$ de los animales son pájaros: $\dfrac{55}{100} \underset{\times 1,4}{\overset{\times 1,4}{=}} \dfrac{77}{140}$

Esto significa que hay 28 gatos, 35 perros y 77 pájaros.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Ga} & & \text{Pe} & & \text{Pa} & & \text{Todos} & & \\
\dfrac{20}{100} & + & \dfrac{25}{100} & + & \dfrac{55}{100} & = & \dfrac{20+25+55}{100} & = & \dfrac{100}{100} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dfrac{28}{140} & + & \dfrac{35}{140} & + & \dfrac{77}{140} & = & \dfrac{28+35+77}{140} & = & \dfrac{140}{140}
\end{array}$$

Podríamos preguntarnos, cómo se supo, en el punto (i) que, para obtener la fracción equivalente conveniente (la de denominador 140), convenía multiplicar por 28. O cómo se supo, en el punto (ii) que, para obtener la fracción equivalente conveniente, convenía multiplicar por 1,4.

Es decir, buscábamos una fracción equivalente a la dada, con denominador 140:

Nos preguntamos: ¿por cuál número x hay que multiplicar a 100 para obtener 140? Esto se puede escribir mediante esta ecuación:

$$100x = 140$$

Cuya solución es

$$x = \frac{140}{100} = 1,4$$

Sabemos entonces que $100 \cdot 1,4 = 140$. Como al multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número se obtiene una fracción equivalente, resulta, como queríamos:

$$\frac{25}{100} \underset{\times 1,4}{\overset{\times 1,4}{=}} \frac{35}{140}$$

Observen que el numerador 35 de la fracción se obtuvo como:

$$25 \cdot 1,4 = 35$$

O, con más detalle, como:

$$25 \cdot \frac{140}{100} = 35$$

Lo que es lo mismo que:

$$\frac{25 \cdot 140}{100} = 35$$

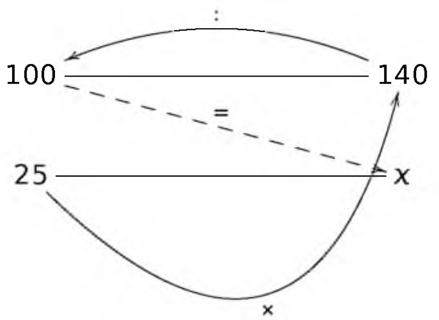
Observen también que fue adecuado multiplicar numerador y denominador por el número 1,4 (a pesar de que no era un número entero) pues $25 \cdot 1,4 = 35$ y $100 \cdot 1,4 = 140$ resultaron ser enteros, por lo que $\frac{35}{140}$ resultó ser una fracción.

Esta forma de calcular el numerador 35 es, en definitiva, la que en la escuela suele llamarse *regla de tres*, en la que la misma información se organiza de esta manera:

$$100 \text{ ———————— } 140$$

$$25 \text{ ———————— } x$$

Y donde el valor de x se calcula, como seguramente recordarán, de esta manera:



Es decir:

$$x = 25 \cdot 140 : 100 = 25 \cdot \frac{140}{100} = \frac{25 \cdot 140}{100} = 35$$

En resumen:

- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si existe un número n tal que $a \cdot n = c$ y $b \cdot n = d$. Observaciones:
  - Si ese número n existe, resulta $c/a = d/b = n$
  - Como consecuencia de lo anterior si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$. Por ejemplo, en la Figura A.6 se ve cómo la fracción $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$ y cómo la fracción $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$:

$$\frac{1}{3} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \frac{3}{6}$$

- Suma de fracciones: Para sumar dos fracciones, deben tener el mismo denominador. Si no lo tienen, buscamos fracciones equivalentes a ellas que sí lo tengan. Esto se ilustra también en la Figura A.6:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

  Inventen ejemplos numéricos y construyan gráficos como los de la Figura A.6, para interpretar la siguiente regla general de la suma de fracciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

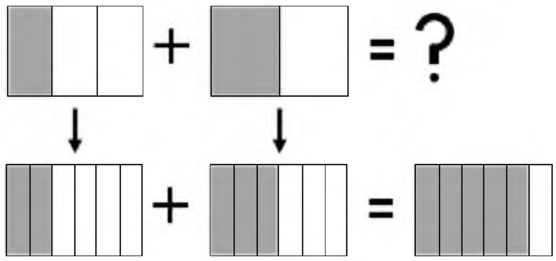


Figura A.6: Suma de fracciones

- Producto de fracciones: El producto de dos fracciones es otra fracción. El numerador es el producto de los numeradores de las fracciones que se están multiplicando y el denominador es el producto de sus denominadores. Esta forma de multiplicar se ilustra en las Figuras A.7 y A.8.

  La Figura A.7 representa a la cantidad $\frac{2}{5}$. Si de esos $\frac{2}{5}$ queremos tomar sus 3 séptimas partes, lo que queremos es obtener $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{5}$ o, lo que es lo mismo $\frac{3}{7}$ veces $\frac{2}{5}$, o bien (como se suele escribir) $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$, que es el producto entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$.

  La Figura A.8 muestra que, al tomar $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{5}$ obtenemos (sombreado en gris oscuro) 6 partes de un total de 35. Esto es:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$$

  Inventen ejemplos numéricos y construyan gráficos como los de las Figuras A.7 y A.8, para interpretar la siguiente regla general de producto de fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

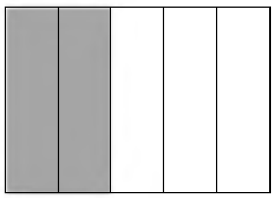


Figura A.7

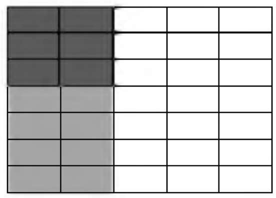


Figura A.8

- Fracción de un entero. Una fracción de un entero se puede calcular como el producto entre la fracción y el entero. Por ejemplo, si en una reunión hay 48 personas y las dos terceras partes son mujeres, el número de mujeres es $\frac{2}{3}$ de 48, es decir,

$$\frac{2}{3} \cdot 48 = \frac{2 \cdot 48}{3} = 2 \cdot \frac{48}{3} = 2 \cdot 16 = 32$$

Ejemplo 3: Vamos a analizar el Problema 55 de la página 28. Transcribimos el enunciado:

Luquitas está estudiando para dar un examen de matemática, para lo cual tiene que practicar resolviendo problemas de una guía. El primer día resuelve la mitad de los problemas, el segundo día resuelve un cuarto de lo que le quedaba y el tercer día resuelve un tercio de lo que le quedaba.

a) ¿Qué día resolvió más problemas? ¿Qué día menos?

b) ¿Qué parte de la guía le falta resolver?

c) Si la guía tiene 48 problemas, ¿cuántos problemas resolvió cada día?

d) ¿Qué porcentaje de la guía resolvió? ¿Qué porcentaje le falta resolver?

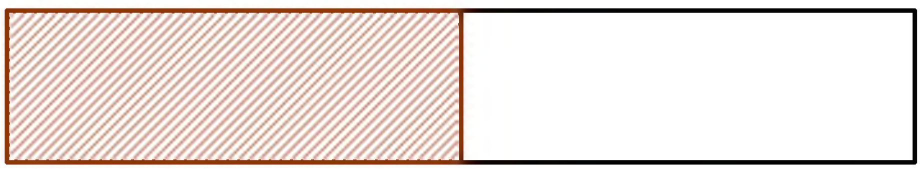
Lo ideal es que no lean esta explicación hasta que el problema haya sido desarrollado en clase. Acá mostraremos un par de soluciones, pero se espera que en la clase, entre las ideas de todos, también surjan otras distintas.

Después de todos los temas desarrollados en esta sección, la respuesta a cada una de las preguntas será sencilla, si antes logramos una buena representación de la información.

La primera solución que mostraremos se basa en una representación gráfica. Todo la situación trata acerca de fracciones de un total de problemas de matemática que Luquitas debe resolver. Como estamos acostumbrados a representar gráficamente las fracciones con rectángulos, podemos pensar en uno que represente el total de los problemas de Luquitas.

Total de los problemas de Luquitas.

El primer día resuelve la mitad de los problemas:

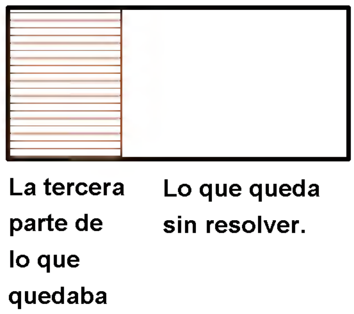


La mitad de los problemas. **La mitad sin resolver.**

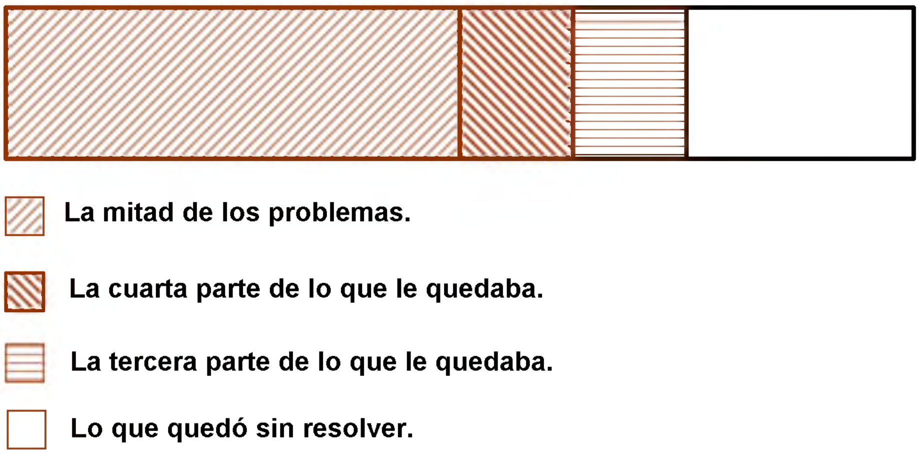
El segundo día resuelve un cuarto de lo que le quedaba:

La cuarta parte de la mitad sin resolver. **Lo que queda sin resolver.**

El tercer día resuelve un tercio de lo que le quedaba.



El gráfico completo con la fracción que resolvió cada día es el siguiente:



Todos estos gráficos fueron hechos con ayuda de la computadora y las fracciones pudieron medirse con gran precisión. Pero no sería tan fácil, a simple vista, decidir dónde marcar las divisiones para determinar mitades, cuartos y tercios.

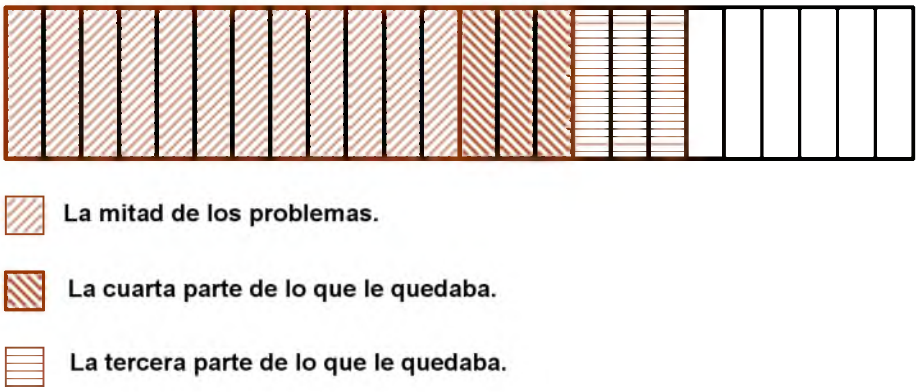
Para este problema eso será posible si se propone una escala que sea fácilmente divisible en la cantidad de partes iguales que requieren los datos. Las fracciones del total que aparecen involucradas son mitades, cuartos y tercios. Un número entero que será fácilmente divisible en mitades, cuartos y tercios es producto entre 2, 4 y 3, es decir, $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Una representación del total de problemas divididos en 24 partes iguales permitirá representar todas las fracciones involucradas, ya que

$$\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$$

La siguiente figura permite resolver el problema gráficamente:



El rectángulo que representa el número total de problemas fue dividido en 24 partes iguales. Ahora es fácil interpretar en el gráfico cada pregunta del problema:

a) Luquitas resolvió más problemas el primer día. Resolvió $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ del total de problemas. El gráfico muestra que la fracción de problemas resuelta el segundo y el tercer día es la misma: $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ del total.

b) Le faltan resolver $\frac{6}{24}$ de la guía de problemas. Lo que es equivalente a $\frac{1}{4}$ de la guía.

c) Observen que todo lo que se respondió hasta acá es independiente de la cantidad total de problemas. Es decir, pudimos hacer toda nuestra interpretación, sin necesitar el dato de que los problemas son en total 48. Ahora podemos tener esto en cuenta para saber cuántos problemas resolvió Luquitas cada día. Como los problemas son en total 48 y el rectángulo fue dividido en 24 partes, cada una de ellas representa 2 problemas. Entonces es fácil calcular que el primer día Luquitas resolvió $12 \cdot 2 = 24$ problemas, mientras que el segundo y el tercer día resolvió la misma cantidad de problemas: $3 \cdot 2 = 6$ problemas.

d) Luquitas resolvió el primer día la mitad de los problemas. Esto se puede expresar de muchas maneras:
$$\frac{12}{24} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\,\%$$
La última de las expresiones es la que llamamos porcentaje.
El segundo y el tercer día resolvió la misma cantidad, que también puede expresarse de muchas formas equivalentes:
$$\frac{3}{24} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8} = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\,\%$$

El problema se puede resolver también en forma completamente numérica, sin necesidad de hacer gráficos. Desde luego, esto requiere un poco más de manejo de las fracciones.

Llamemos T al total de problemas. Vamos a organizar la información en una tabla.

Día	problemas resueltos	Le faltan resolver
0	0	T
1	$\frac{1}{2}T$	$T - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}T$
2	$\frac{1}{4}(\frac{1}{2}T) = \frac{1}{8}T$	$\frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T = \frac{3}{8}T$
3	$\frac{1}{3}(\frac{3}{8}T) = \frac{1}{8}T$	$\frac{3}{8}T - \frac{1}{8}T = \frac{2}{8}T = \frac{1}{4}T$

Ahora, simplemente reemplazando el total de problemas T por 48 en la tabla y resolviendo las cuentas, podemos reemplazar toda la información por valores numéricos:

Día	problemas resueltos	Le faltan resolver
0	0	48
1	24	$48-24=24$
2	$\frac{1}{8}\cdot 48=6$	$24-6=18$
3	$\frac{1}{3}\cdot 18=6$	$18-6=12$

Tablas y gráficos

Como vimos en esta clase, una caja negra es un artefacto que transforma un número que le ingresamos en otro número, mediante un proceso que tiene programado. En realidad, como veremos en otros ejemplos, también podrían ingresar a la caja negra otros objetos, no necesariamente números.

Veamos algunos ejemplos de cajas negras:

Ejemplo 1: La primera caja negra que apareció en el Problema 97, a un número entero lo transforma en el siguiente.

Ejemplo 2: La cuarta caja negra que apareció en el Problema 97, a un número lo transforma en el cuadrado de ese número.

Ejemplo 3: La quinta caja negra que apareció en el Problema 97, a un número lo transforma en el anterior, si es impar, y en su mitad, si es par.

Ejemplo 4: Como dijimos antes, no necesariamente ingresan números en las cajas negras. Así, por ejemplo, una posible caja negra consiste en ingresar el nombre de una persona y que salga su número de D.N.I., ya que todas las personas tienen un número de DNI y les corresponde uno solo.

Ejemplo 5: Otro ejemplo consiste en ingresar a la caja negra la fecha de un día del año y que la caja negra devuelva la temperatura máxima de Moreno, durante ese día.

Ejemplo 6: Una caja negra puede asignarle a cada país su P.B.I. (producto bruto interno) durante 2013.

Vamos a analizar en detalle el Ejemplo 2. Esta caja negra transforma a cada número en su cuadrado. Veamos de cuántas maneras más se puede dar la misma información.

- Mediante una tabla de valores. Ésta es seguramente la manera en que fueron explorando la caja cuando debían descubrir su funcionamiento. Algunos valores son:

Entra	Sale
1	1
0	0
2	4
7	49
$0,5$	$0,25$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
-2	4
$\sqrt{2}$	2

La tabla se puede ordenar →

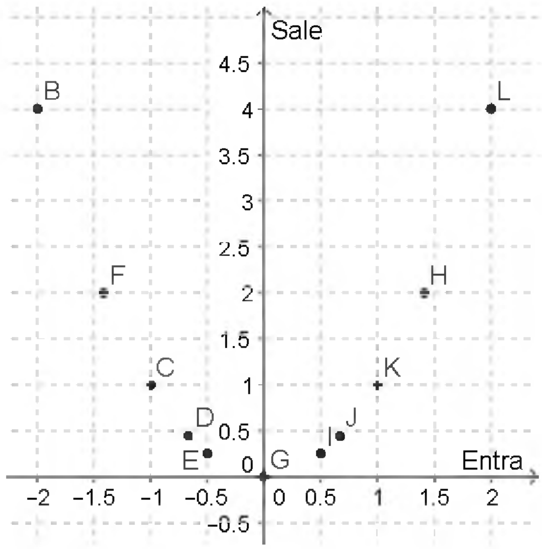
Entra	Sale
-2	4
0	0
$\sqrt{2}$	2
$0,5$	$0,25$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
1	1
2	4
7	49

Y completar →

Entra	Sale
-7	49
-2	4
-1	1
$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
$-0,5$	$0,25$
$-\sqrt{2}$	2
0	0
$\sqrt{2}$	2
$0,5$	$0,25$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
1	1
7	49

- Mediante un gráfico cartesiano, en el que se ubican las parejas asignadas por la caja negra, según sus coordenadas. La primera corresponde al valor de entrada y se representa en el eje horizontal (también llamado **eje de abscisas**). La segunda corresponde al valor de salida y se representa en el eje vertical (también llamado **eje de ordenadas**). Para interpretar el gráfico reproducimos la última versión de la tabla. En la última columna se nombran los puntos y se detalla cuáles son sus coordenadas.

Entra	Sale	Punto y coordenadas
-7	49	$A=(-7,49)$
-2	4	$B=(-2,4)$
-1	1	$C=(-1,1)$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$D=(-\frac{2}{3},\frac{4}{9})$
$-0,5$	$0,25$	$E=(-0,5,0,25)$
$-\sqrt{2}$	2	$F=(-\sqrt{2},2)$
0	0	$G=(0,0)$
$\sqrt{2}$	2	$H=(\sqrt{2},2)$
$0,5$	$0,25$	$I=(0,5,0,25)$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$J=(\frac{2}{3},\frac{4}{9})$
1	1	$K=(1,1)$
7	49	$L=(7,49)$



- Mediante una fórmula en la que están involucradas las dos variables.

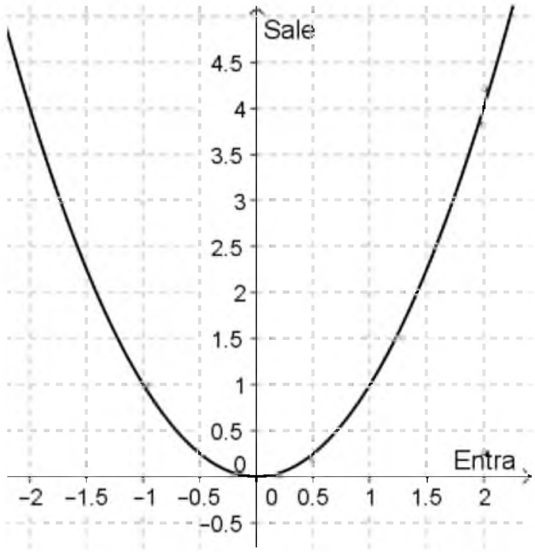
  Si llamamos E al valor que entra y S al que sale, la fórmula es:

$$S=E^2$$

  Es muy frecuente llamar x al número que entra e y al que sale. Con esta notación la fórmula es:

$$y=x^2$$

- Está claro que la tabla no está completa, ni tampoco podría estarlo, pues los números que se pueden ingresar en la caja negra para que ésta los devuelva elevados al cuadrado son infinitos. El gráfico anterior está formado por diez puntos de la tabla (Los puntos A y L no se ven porque la escala del eje vertical no llega a 49). Pero podría pensarse en un gráfico que describa todas las parejas de puntos de coordenadas (x,x^2) para cualquier valor de x. Un gráfico así es una curva de infinitos puntos, algunos de los cuales son los diez que se ven en el gráfico anterior:



Para entender un poco mejor qué es una caja negra, vamos a ver ejemplos de artefactos que **no** son cajas negras.

- Una máquina que transforma un número en su número entero más cercano no funciona como una caja negra, pues en el caso, por ejemplo, del $1,5$ tanto el 1 como el 2 están a la misma distancia y las cajas negras no pueden transformar un mismo número en otros dos distintos. En cambio, si en vez de que la caja negra deba transformar un número en el entero más cercano, la programamos para que transforme a cada número en el entero más cercano, pero que sea menor al número ingresado, entonces sí funcionará como una caja negra, pues en el caso de $1,5$ el más cercano, más chico es solamente el 1.
- Si al ingresar el nombre de una persona la caja debe devolver el nombre de su hijo, no funcionará como una caja negra, pues, para empezar, hay personas que no tienen hijos, en cuyos casos no "saldría" nada de la caja. Por otra parte, una persona podría tener más de un hijo. En esos casos, como en el ejemplo anterior, la caja no sabría cuál de los hijos asignarle a esa persona. En cambio si la caja negra solo permite la entrada de personas con hijos que no tenga mellizos, trillizos, etc... (piensen por qué es necesario poner esta condición), se soluciona el problema de que pueda no salir nada de ella (el caso de las personas sin hijos). Y si, en vez de asignarle el nombre de un hijo, se programa la caja para que asigne el nombre del hijo mayor, entonces sí funcionará como una caja negra, pues todas las personas con hijos tendrán un único hijo mayor.

Habiendo visto estos ejemplos y "no ejemplos", ya estamos en condiciones de dar una definición un poco más precisa de que significa *ser una caja negra*.

Una caja negra es una máquina que forma parejas entre objetos de dos conjuntos, de manera que a cada elemento del primer conjunto le asigna uno y sólo uno del otro conjunto. Es decir a todos los elementos del primer conjunto les tiene que corresponder uno del segundo, pero no más de uno (volvé a los ejemplos y "no ejemplos" para releer varias veces estas últimas líneas).

En este punto es –para algunos– el momento de ir abandonando el nombre *caja negra* y pasar a reemplazarlo por el nombre de **función**, que es el que se le da en matemática a este concepto. Es muy probable que muchos de ustedes lo hayan reconocido desde el primer momento, que otros hayan tardado un poco más o incluso que algunos recién a partir de esta lectura o de la reflexión hecha posteriormente en clase hayan conectado los conceptos de caja negra, fórmula, tabla de datos y gráficos con el concepto de función que tuvieran construido desde los estudios en la escuela secundaria. En cualquier caso, toda la secuencia de problemas acerca de cajas negras con los que venimos trabajando debe considerarse como una de las muchas maneras que existen de pensar acerca de las funciones, para ayudarnos a comprender toda la información que se puede describir, procesar y organizar a partir de ellas.

Los estudiantes que tendrán materias de matemática en sus carreras no podrán progresar en su formación matemática apoyándose solamente en la noción de caja negra. Necesitarán definiciones más precisas de los conceptos para resolver las situaciones en las que no sea tan sencillo decidir si uno está o no en presencia de una función y situaciones en que se necesite construir funciones más generales, aplicables a situaciones distintas de las que elegimos para estos ejemplos. Para estos estudiantes se desarrolla la siguiente subsección en la que se avanza con algunas definiciones más técnicas (que de todas maneras forman parte de los programas de matemática de la escuela media)[5].

Funciones. Definiciones técnicas

Siguiendo con la terminología, según la cual la caja negra no es otra cosa que una **función**, el primer conjunto, el de las cosas (en casi todos nuestros ejemplos, números) que ingresan a la caja negra, se llama **dominio de la función**.

Así, volviendo a los ejemplos de las cajas negras anteriores, el dominio de la función del Ejemplo 1 es el conjunto de los números enteros (¿por qué no podrían ser los números racionales o reales?), el dominio de la función del Ejemplo 2 es el conjunto de los números reales, el dominio de la función del Ejemplo 3 es otra vez el conjunto de los números enteros, el dominio de la función del Ejemplo 4 es el conjunto de los ciudadanos argentinos, el dominio de la función del Ejemplo 5 es el conjunto de los días del año y el dominio de la función del Ejemplo 6 es el conjunto de los países del mundo que tengan registros sobre el producto bruto interno.

Al segundo conjunto, es decir, al que llega la caja negra, lo llamamos **codominio de la función**. La manera de establecer cuál es el codominio de una función no es única. Una función se puede definir proponiendo para ella distintos codominios posibles, dentro de cierto grado de libertad que discutiremos a continuación de unos ejemplos.

Así, volviendo a las cajas negras anteriores, el codominio de la función del Ejemplo 1 puede definirse como el conjunto de los números enteros, el codominio de la función del Ejemplo 2 puede definirse como el conjunto de los números reales, el codominio de la función del Ejemplo 3 puede definirse, otra vez, como el conjunto de los números enteros, el codominio del Ejemplo 4 puede definirse como el conjunto de números naturales, el codominio del Ejemplo 5 puede definirse como el conjunto de los números positivos y el codominio del Ejemplo 6 puede definirse como el conjunto de los números positivos.

¿Qué significa la frase "puede definirse como..." que aparece tan frecuentemente en el párrafo anterior? Si el codominio de la función del Ejemplo 1 puede definirse como el conjunto de los números enteros es porque también podría definirse de otra manera. Observen que, por ejemplo, podría decirse también que el codominio de esa función es el conjunto de los números reales, pues todo número entero es también real. Decir que el codominio es el conjunto de los números reales significa que todo lo que salga de la caja será algún número real (aunque no cualquier número real pueda salir de la caja, ya que solo saldrán números enteros). Esto significa que el codominio puede elegirse con cierta libertad, pero no con libertad total. Por ejemplo, en la función del Ejemplo 3, el codominio no podría ser el conjunto de ciudadanos de la Argentina. No tendría ningún sentido, por la manera en que funciona la caja negra. Un ejemplo más: también podría decirse que el codominio de la función del Ejemplo 2 es el conjunto de los números reales no negativos, pues sabemos que cualquier número elevado al cuadrado es no negativo. Surgen las siguientes preguntas:

[5] Desde luego, aunque la recomendación está dirigida a quienes tendrán materias de matemática en sus carreras, están invitados a esta lectura todos los estudiantes que sientan curiosidad y que vean aquí la oportunidad de encontrar nuevos aportes para la comprensión.

a) ¿Es algo ambiguo el tema de definir el codominio de una función?

b) ¿Cuál es la utilidad matemática de toda esta discusión?

La respuesta a la primera pregunta es "Sí". El codominio de una función se puede establecer, al igual que el dominio, en el momento de definir la función. Tenemos una notación matemática precisa para definir una función y la vamos a ilustrar con la función del Ejemplo 1, anotándola del siguiente modo:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/f(x) = x + 1 \tag{12.4}$$

Con esta definición estamos estableciendo que el dominio de f es $\mathbb{Z}$ (los números enteros) y que su codominio es $\mathbb{R}$.

Otra definición posible para f sería la siguiente:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/f(x) = x + 1 \tag{12.5}$$

Con esta definición estamos estableciendo que el dominio de f es $\mathbb{Z}$ (los números enteros), pero ahora su codominio es también $\mathbb{Z}$. La diferencia entre definir la función de una manera o de otra está relacionada con la segunda de las preguntas que nos hicimos recién.

Para responderla, observemos lo siguiente: si bien podemos definir la función del Ejemplo 1 como se ve en (12.4) esto provocará que no todos los valores del codominio sean asignados a algún elemento del dominio por dicha función. Por ejemplo, el número $\frac{1}{2}$ está en el codominio, pero no es asignado como pareja a ningún elemento del dominio, pues ningún número entero tiene como número siguiente al número $\frac{1}{2}$. Si volvemos a pensarlo como cajas negras, estamos diciendo que ningún número que ingrese a la caja podrá transformarse en $\frac{1}{2}$ mediante la acción de esta caja.

Aquellos valores que sí son asignados por la función forman el conjunto llamado **imagen de la función**. Así, podemos escribir que en el ejemplo anterior $Im(f) = \mathbb{Z}$.

Veamos cuál es la consecuencia de todo esto. Recuerden que también nos ha interesado analizar, a la hora de estudiar las cajas negras, la existencia de cajas negras *deshacedoras*. Así, analizando los ejemplos del comienzo, para la caja negra del Ejemplo 1 existe caja negra deshacedora. ¿Cómo haríamos para deshacer la transformación que consiste en "darle a un número el siguiente"? La idea de la caja negra deshacedora es que si introducimos en esta segunda caja un número y que salió de la caja original cuando pusimos un número x, la caja negra deshacedora nos devolverá otra vez el número x original. Hacer que la caja negra transforme un número para luego meterlo en la caja deshacedora es como no hacer nada. Así, la manera de deshacer la transformación de "darle el siguiente" será "darle el anterior". Si a un número lo transformamos en el siguiente y a éste lo transformamos en el anterior, obtendremos el anterior del siguiente con lo que recuperaremos el número original.

Veamos la idea en este esquema:

$$n \longrightarrow n + 1 \longrightarrow (n + 1) - 1 = n$$

Como dijimos, aplicar las dos cajas negras, primero la que asigna el siguiente y luego la que asigna el anterior es como no hacer nada pues quedó:

$$n \longrightarrow n$$

Si hacemos el proceso anterior en el orden inverso, nos queda:

$$n \longrightarrow n-1 \longrightarrow (n-1)+1 = n$$

Es decir, que los procesos de darle a un número el anterior y darle el siguiente son procesos que se deshacen mutuamente.

Observemos que esta función es muy particular, pues cada elemento del codominio es el transformado de un único elemento del dominio y esto pasa para todos los elementos del codominio, siempre y cuando –¡y esto es lo importante!– el codominio sea el conjunto $\mathbb{Z}$, como se propuso en (12.5) y no el conjunto $\mathbb{R}$, como se propuso en (12.4). Para esta última función no existe función deshacedora pues hay números en el codominio, como por ejemplo $\frac{1}{2}$, que no tendrían a dónde regresar: así como $\frac{1}{2}$ no es el siguiente de ningún número entero, no hay ningún entero que sea el anterior de $\frac{1}{2}$. Entonces si quisiéramos deshacer el proceso y transformar al $\frac{1}{2}$ en el número que se transformó en él, no podremos hacerlo: nos encontraremos con que no hubo ningún número que se haya podido transformar en $\frac{1}{2}$. Estaremos en la búsqueda de una función deshacedora que debería transformar en algo al $\frac{1}{2}$, pero que no lo puede transformar en nada. Esto contradice la posibilidad de que sea una función, según vimos anteriormente.

Así, vemos que para poder deshacer el proceso necesitamos que todos los elementos del codominio pertenezcan a la imagen de f, cuando una función cumple con esta condición diremos que es una función **suryectiva** o **sobreyectiva**. Así, la función definida en (12.5) es sobreyectiva, pero la definida en (12.5) no lo es.

Ahora que ya hemos incorporado más terminología, ¿qué más tendremos que pretender del funcionamiento de una caja negra para que exista caja negra deshacedora? O bien, ¿qué tendremos que pretender de una función para que exista función deshacedora?

En primer lugar analicemos por qué la función del Ejemplo 2 no tiene función deshacedora. Vimos que a través de esta función tanto el 2 como el -2 van a parar a 4. ¿Podemos deshacer este proceso? Si queremos deshacer este proceso por un lado tendremos que transformar el 4 en el 2, pero por otro lado también lo tendríamos que transformar en -2 y ya vimos que esto no puede pasar, pues hemos dicho que una función asigna a cada elemento uno único del codominio.

Por lo tanto, otra condición para que pueda existir una caja negra deshacedora es que si dos elementos son distintos entonces se transformen en cosas distintas. Dicho de otro modo, que no haya dos elementos a los que la función transforme en el mismo.

Una función f que cumple lo anterior para todo par de elementos del dominio se dice **inyectiva**.

Sintetizamos toda la discusión agregando una definición más:

- Así como el concepto que hemos introducido con la idea de *caja negra* es el que recibe el nombre de **función**, lo que hemos llamado *caja negra deshacedora* recibe el nombre de **función inversa**. Si una función se representa con el símbolo f, su inversa –de existir– se representa con el símbolo f^{-1}.

- Los conceptos de **función sobreyectiva** y de **función inyectiva** se definen buscando describir las condiciones que debe cumplir una función para que exista su inversa.

- Una función es sobreyectiva si su codominio es igual a su imagen. La sobreyectividad de una función garantiza que todo elemento del codominio tendrá una imagen, para la función inversa.

- Una función es inyectiva si no hay en su dominio dos elementos distintos que tengan la misma imagen. La inyectividad de una función garantiza que la función inversa que se pretende construir no fracase por tener en su dominio un elemento que necesita regresar a otros dos distintos.

Para terminar de definir la terminología específica de los conceptos tratados en clase nos faltaría ver cómo llamamos a la operación de aplicar la acción de una caja negra y luego otra, como hicimos en algunos de los problemas.

La fórmula de la primera caja negra (la llamaremos caja 1) que se trató en clase, la podemos escribir como

$$n \to n+1$$

Es decir: a cada número n la caja lo transforma en el siguiente, $n+1$.

La fórmula de la segunda caja negra (la llamaremos caja 2) que se trató en clase (a cada número le daba el doble), la podemos escribir

$$m \to 2m$$

Es decir: a cada número m la caja lo transforma en su doble $2m$

¿Qué proceso hacemos si luego de aplicar la primera caja negra, aplicamos la segunda? ¿Será esto una caja negra? (hay que convencerse de que sí lo es).

Hagamos esto para algunos cálculos:

$$5 \xrightarrow{\text{caja 1}} 6 \xrightarrow{\text{caja 2}} 12$$

$$5 \xrightarrow{\text{caja 1}} 5\mathbf{+1} \xrightarrow{\text{caja 2}} \mathbf{2}\cdot(5+1)$$

$$70 \xrightarrow{\text{caja 1}} 71 \xrightarrow{\text{caja 2}} 142$$

$$70 \xrightarrow{\text{caja 1}} 70\mathbf{+1} \xrightarrow{\text{caja 2}} \mathbf{2}\cdot(70+1)$$

Siguiendo esta lógica para cualquier número n al que se le efectúe primero el proceso de la caja 1 y luego el proceso de la caja 2, obtendremos:

$$n \xrightarrow{\text{caja 1}} n\mathbf{+1} \xrightarrow{\text{caja 2}} \mathbf{2}\cdot(n+1)$$

Resumiento lo anterior nos queda:

$$n \longrightarrow n+1 \longrightarrow 2.(n+1) = 2n+2,$$

es decir que el proceso que se obtiene de hacer actuar primero a la caja 1 y luego a la 2 será:

$$n \longrightarrow 2n + 2$$

¿Dará lo mismo si hacemos actuar primero a la caja 2 y luego a la caja 1? Veamos qué pasa en este caso:

$$n \xrightarrow{\text{caja 2}} \mathbf{2}n \xrightarrow{\text{caja 1}} (2n)\mathbf{+1}$$

De este experimento concluimos:

a) La acción combinada de dos cajas negras se puede resumir en la de una única caja negra.

b) El orden en que se combinen las acciones de ambas cajas no es un detalle menor, porque las cajas que resultan son en general distintas, ya que $n \longrightarrow 2n + 1$ es diferente de $n \longrightarrow 2n + 2$.

Volviendo a la terminología, la nueva función que resulta de aplicar primero una función f y luego otra función g, se llama **función compuesta de g con f** y se escribe así: $g \circ f$. De esta manera, si es $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x$ tenemos:

$(g \circ f)(x) = 2x + 2$

y

$(f \circ g)(x) = 2x + 1$

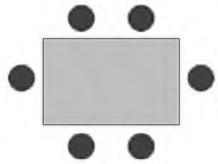
Para terminar con esta subsección, tal vez lo más importante de la misma sea el hecho de que ha sido escrita para que las ideas se conecten con la forma en que se vienen desarrollando los conceptos, a partir de los problemas abordados en las clases. Pero en muchos libros de la bibliografía (por ejemplo [42], [45], [46] o [47]) encontrarán definidos los mismos conceptos y explicados de distintas maneras. La recomendación es no quedarse con esta lectura y utilizarla como trampolín para pasar a textos más detallados y completos.

Modelos lineales

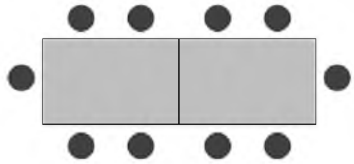
Una idea importante de este taller es que puedan pensar en los problemas que se proponen en las distintas clases no como temas separados y desconectados, sino como problemas que muchas veces terminan resultando parecidos, en la medida en que vamos contando cada vez con más recursos matemáticos para modelizarlos, analizarlos y resolverlos.

Para ilustrar esta idea, retomaremos problemas de clases anteriores y los analizaremos con más recursos. Relean el Problema 24 y el Problema 26 y las soluciones a las que llegaron en cada uno.

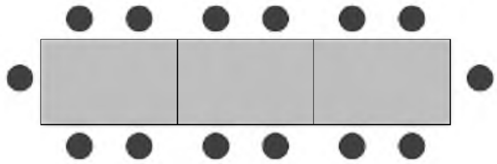
Comencemos por el Problema 24



Diseño 1: una mesa



Diseño 2: dos mesas



Diseño 3: tres mesas

La información sobre el número de personas que corresponde a cada cantidad de mesas viene dada por el dibujo de las mesas. Mientras los dibujos estén a la vista, las personas se pueden contar “a mano”.

Veamos otras formas de representar la información.

a) Mediante una tabla:

Mesas	Personas
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22
...	...

Tabla A.3

Esta tabla corresponde a una caja negra: la que transforma el número de mesas en el correspondiente número de personas. Pero las cajas negras representan lo que a esta altura ya llamamos **funciones**. En este caso se trata de la función que, a cada cantidad de mesas, le asigna el número de personas que pueden sentarse a su alrededor.

b) Mediante una fórmula: cuando trabajaron con este problema, una de las fórmulas que se obtuvo fue

$$P = 4M + 2$$

donde P es el número de personas y M el de mesas.

Si escribimos esto con el detalle con que se escribe formalmente una función, pondremos:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} / f(x) = 4x + 2 \tag{12.6}$$

Lo que debe leerse como *la función f que a cada número natural x le asigna el número natural* $4x + 2$.

c) Mediante un gráfico:

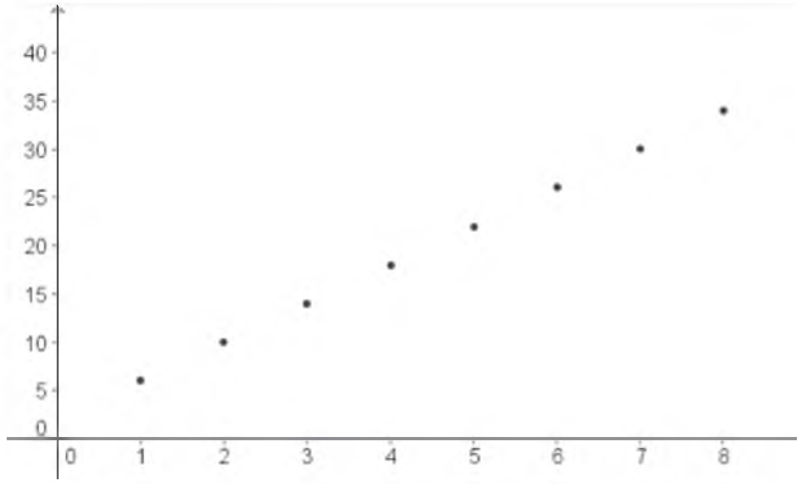


Figura A.9

Observen que el gráfico de la Figura A.9 sólo tiene puntos aislados, pues en el contexto de este problema, tanto el número de mesas como el de personas deben ser enteros positivos.

Si abandonamos el contexto del problema, con las personas y las mesas, y pensamos en esa caja negra y en esa fórmula como aplicables a cualquier número (entero o no), obtenemos las siguientes variantes:

a) La función puede considerarse definida para cualquier número real. Si escribimos esto con el detalle con que se escribe formalmente una función, pondremos:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = 4x + 2 \tag{12.7}$$

Lo que no parece muy distinto a lo que teníamos antes, excepto porque ahora debe leerse como *la función f que a cada número real x le asigna el número real* $4x + 2$. Esto puede apreciarse de inmediato en las otras dos representaciones:

b) La tabla puede contemplar la posibilidad de introducir en ella cualquier número. En la TABLA A.4 mostramos algunos ejemplos que involucran números racionales negativos o positivos, expresados mediante su desarrollo decimal o mediante una fracción.

c) La posibilidad de aplicar la fórmula a números más cercanos entre sí provoca que el gráfico esté formado por puntos tan cercanos entre sí, que conviene representarlos con una línea continua, lo que puede observarse en la Figura A.10.

También nos parece importante poder desarrollar una habilidad de manejo algebraico que permita resolver tareas como la siguiente con seguridad y rapidez. Para trabajar en esa línea vamos a rescatar el Problema 118 que pide hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados.

Tengamos en cuenta que uno de los formatos de una ecuación de recta genérica es $y = ax + b$ donde a y b son un par de números que determinan la ecuación. Nuestro desafío será entonces poder

x	y
0	2
0,1	2,4
0,2	2,8
0,3	3,2
0,4	3,6
...	...
-5,2	-18,8
-5,1	-18,4
-5	-18
-4,9	-17,6
...	...
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
$\frac{5}{4}$	7
$-\frac{7}{5}$	$-\frac{18}{5}$

Tabla A.4

determinar de todos los pares de valores posibles de a y b aquellos para los que la ecuación es la de una recta que pasa por los puntos dados. Éstas son algunas de las preguntas que nos podemos hacer y que será bueno que podamos responder:

- ¿Cuál es el par de valores a y b que hace que la recta pase por los puntos que nos dan de datos?
- ¿Serán los valores $a = 3$ y $b = -12$?
- ¿Serán otros dos?
- ¿Cómo podemos saberlo?
- ¿Cómo se traduce al lenguaje algebraico el hecho que el punto $(50, 10)$ pertenezca a la recta $y = 3x - 12$

La respuesta a esta última pregunta es que si $(50, 10)$ pertenezca a la recta de ecuación

$$y = 3x - 12$$

entonces se debe verificar que reemplazando x por 50 e y por 10 en la ecuación se obtenga una igualdad. Pero al hacerlo se obtiene que $10 = 3 \cdot 50 - 12$ que claramente no es una igualdad ya que el lado izquierdo vale 10 y el derecho 138. Luego el punto $(50, 10)$ no pertenece a la recta $y = 3x - 12$ o, lo que es lo mismo, el gráfico de la recta $y = 3x - 12$ no pasa por el punto $(50, 10)$.

Usemos este hecho para averiguar los valores de a y b para que la recta pase por $(50, 10)$. Si se debe verificar la igualdad, entonces $10 = a50 + b$. Observen que esta última igualdad es lo mismo que

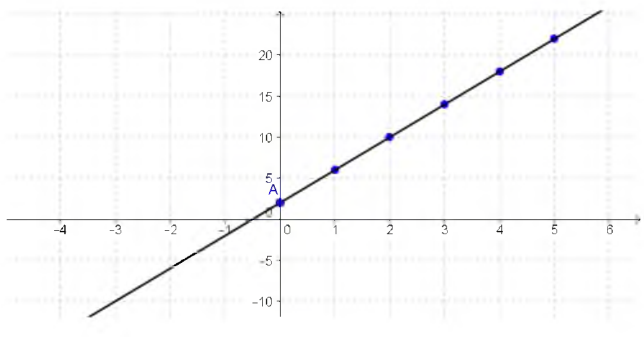


Figura A.10

pedir $10 = 50a + b$, o $50a + b = 10$ o $b = 10 - 50a$. Pero todavía no podemos estar seguros de cuáles son los valores exactos de a y b que estamos buscando. ¿Por qué ocurre esto?

Porque hay infinitas rectas diferentes que pasan por el punto $(50, 10)$. Lo que nos dicen esas igualdades que hemos hallado (que no son otra cosa que ecuaciones que dan una relación entre los coeficientes a y b que determinan la recta), es que si a toma algún valor automáticamente b queda determinado o, viceversa, si fijamos b en algún valor obtenemos un único a.

Podríamos representar la infinidad de rectas que pasan por $(50, 10)$ como

$$y = ax + 10 - 50a$$

que también puede escribirse como $y = ax - a50 + 10$, o sacando factor común a como

$$y = a(x - 50) + 10$$

Es momento de poner en juego la información que nos da el otro punto. Por un punto pasan infinitas rectas, pero por dos puntos a la vez pasa una sola. Usando la información de $(104, 40)$ podemos encontrar cuál debe ser el valor de a para que una sola recta que pase por ambos puntos quede determinada. Reemplazando en $y = a(x - 50) + 10$ obtenemos $40 = a(104 - 50) + 10$. Operando queda $40 - 10 = a(104 - 50)$, luego

$$a = \frac{40 - 10}{104 - 50}$$

con lo cual la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(50, 10)$ y $(104, 40)$ queda de la forma

$$y = \frac{40 - 10}{104 - 50}(x - 50) + 10$$

Podemos ver también a la ecuación como:

$$y - 10 = \frac{40 - 10}{104 - 50}(x - 50)$$

Si reemplazamos el punto $(50,10)$ en la ecuación, ambos lados de la ecuación se anulan, lo que verifica que la recta descripta por la ecuación pasa por el punto.

El efecto que tiene en el plano restar 10 a la coordenada y y restar 50 a la coordenada x corresponde a correr una recta que pasa por el origen 10 unidades en el sentido de las y positivas y 50 unidades en el sentido de las x positivas.

Se preguntarán por qué no terminamos las cuentas y dejamos expresada la ecuación sin hacer las restas $40-10$ o $104-50$ o el cociente de estas cantidades. La respuesta es que dejamos las cuentas sin hacer porque revelan un patrón general que es aplicable a cualquier par de puntos. Por ejemplo, tomemos un par de puntos genéricos (x_1,y_1) y (x_2,y_2). Las cantidades 50, 10, 104, 40 son exactamente las coordenadas x_1,y_1 y x_2,y_2 de los puntos que nos dan como datos.

Cuando dejamos expresada $a=\frac{40-10}{104-50}$ en realidad estamos ante una fórmula más general que nos dice que es

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

y si contemplamos la ecuación $y=\frac{40-10}{104-50}(x-50)+10$ con una mirada más general, reemplazando datos concretos por valores genéricos, vemos que queda de esta forma:

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$

Pero lo que nos parece más importante y valioso rescatar de todo este desarrollo, no es esta fórmula, sino todo el procedimiento realizado para obtener la fórmula, empezando por el caso concreto y siguiendo por la generalización.

¿Cuáles son los puntos más importantes para resaltar del procedimiento para hallar la fórmula?

- Comprender que siempre que una recta pase por un punto, cuando se reemplacen las coordenadas x e y del punto en la ecuación de la recta, se debe obtener una igualdad.
- A partir de imponer la condición del ítem anterior a una ecuación genérica de la recta se pueden hallar condiciones para determinar los valores exactos de los coeficientes genéricos de la recta.
- El trabajo con estas condiciones, no es ni más ni menos que un manejo algebraico de resolver ecuaciones lineales.

Apéndice B: Figuras

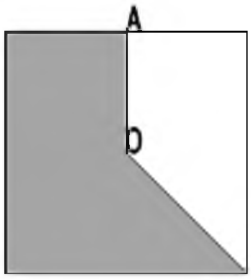


Figura B.11: O es el centro del cuadrado y A, el punto medio del lado.

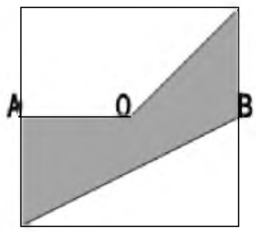


Figura B.12: O es el centro del cuadrado; A y B, puntos medios de los lados.

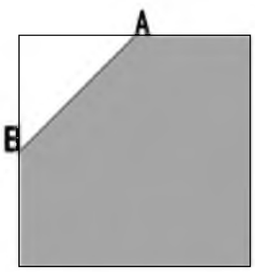


Figura B.13: A y B son puntos medios de los lados.

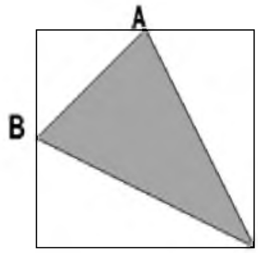


Figura B.14: A y B son puntos medios de los lados.

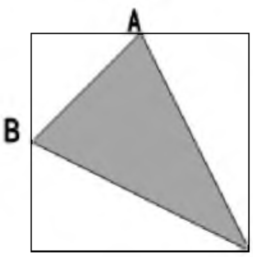


Figura B.15

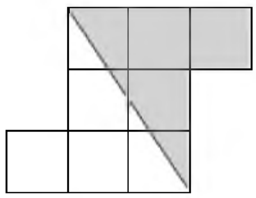


Figura B.16

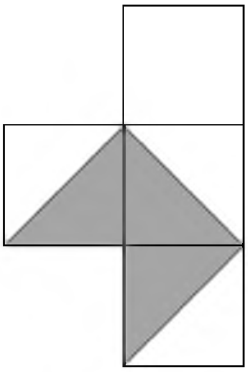


Figura B.17

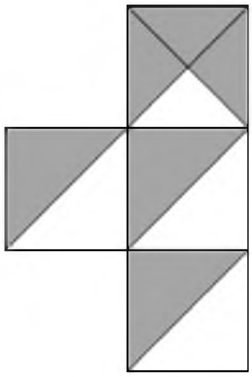


Figura B.18

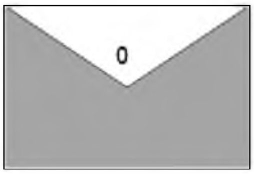


Figura B.19: O es el centro del rectángulo.

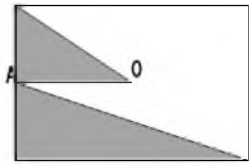


Figura B.20: O es el centro del rectángulo y A, punto medio del lado.

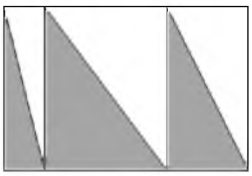


Figura B.21

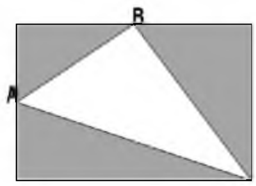


Figura B.22: A y B son puntos medios de los lados; O es el centro del rectángulo.

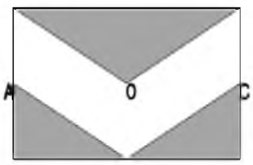


Figura B.23: A y C son puntos medios de los lados.

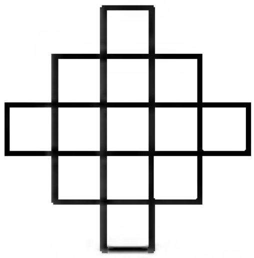


Figura B.24

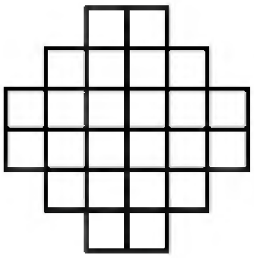


Figura B.25

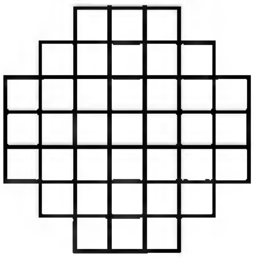


Figura B.26

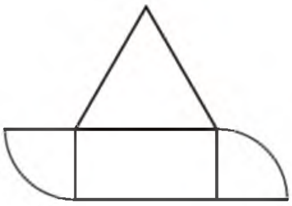


Figura B.27

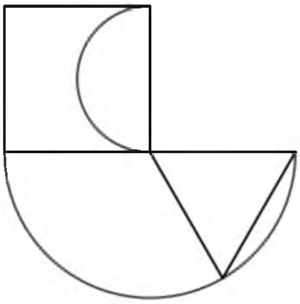


Figura B.28

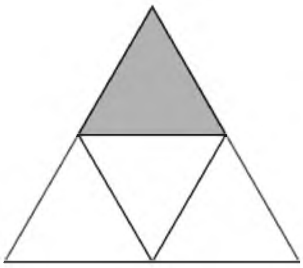


Figura B.29

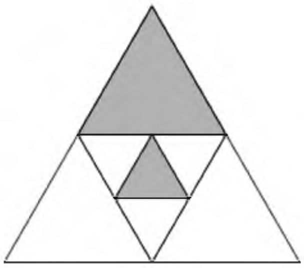


Figura B.30

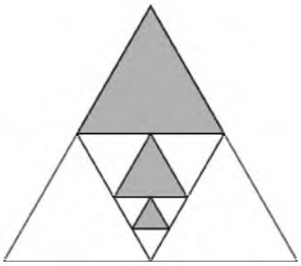


Figura B.31

Figura B.32: ¿Qué me puedo preguntar?

Figura B.33: ¿Qué me puedo preguntar?

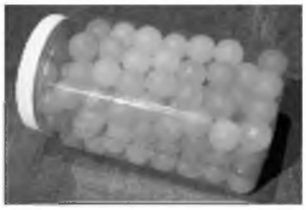


Figura B.34: ¿Qué me puedo preguntar?

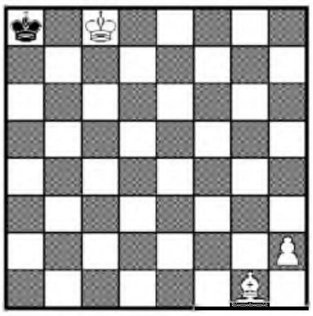


Figura B.35: ¿Cuál fue la última jugada? Smullyan en Juegos y problemas de ajedrez para Sherlock Holmes

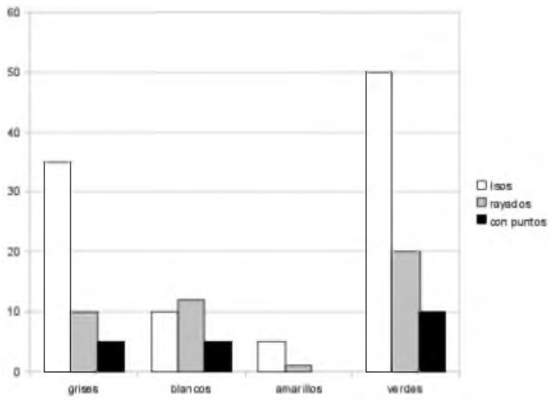


Figura B.36

Apéndice C: Glosario

Este glosario tiene como principal intención servir como una introducción a la matemática vista como una obra de la cultura humana. Podríamos pensar por un lado que las ideas matemáticas son independientes de la cultura y que, por ejemplo, en un hipotético encuentro con seres inteligentes de otros mundos estos tendrían los mismos conceptos o ideas matemáticas que nosotros. Tendrían la misma idea de cuadrado, la misma idea de 2, la misma idea de suma. Pero, además de ser un conjunto de ideas abstractas, la matemática es obra de humanos. La matemática como cultura incluye, su escritura, sus símbolos, sus métodos, sus personajes, sus costumbres, sus prácticas, algunas ideas que salen fuera de la esfera de acción de la matemática, además de las propias ideas matemáticas.

A partir de la edición 2019 de este cuadernillo, hemos decidido incorporar al glosario algunos términos definidos por los mismos estudiantes del TRP, en el curso de actividades que fueron propuestas en la clase. Hemos elegido las definiciones de conceptos que son propios del tipo de trabajo que se propone en el taller, por delante de las que corresponderían a vocabulario técnico de la jerga matemática, y también las definiciones que por su tono y estilo hayan sabido captar el espíritu informal y lúdico del Glosario.

Los términos y definiciones creados por los estudiantes están identificados con el símbolo ✍[6].

Ábaco: Artefacto de cálculo que lleva miles de años de uso en varias partes del planeta. Tecnología que compite con el pizarrón por el título de más longeva aún en uso. Compuesto de bolitas insertadas en barras paralelas en un cuadro de madera. Todavía se puede ver a comerciantes chinos y japoneses manejarlo con veloz maestría para hacer sumas, multiplicaciones y cálculos más complejos.

Es además un hecho afortunado que se trate de un instrumento de cálculo, pertinente por lo tanto al presente glosario, porque parece ser una de las palabras en castellano destinadas a encabezar casi cualquier glosario en el que alguien desee incluirla.

✍ **Argumentación:** proviene del latín *argumentum* y es el modo en que uno intenta demostrar o convencer a otro sobre aquello que quiere afirmar o negar, a través de fundamentos. Más allá del significado en sí, nos vamos a centrar en el uso matemático de la argumentación. Cómo a través de ella uno mejora su razonamiento y la forma de desarrollar la resolución de problemas. Teniendo un punto de partida, en base a escuchar o debatir los problemas argumentando la respuesta, uno mejora, sin importar lo poco o mucho que sea, o incluso si está equivocado, ya que le permitirá rever y encontrar la solución con mayor facilidad, además de mejorar la seguridad al expresar su postura.

En suma, la argumentación nos permite crear o mejorar una forma personal de afrontar y resolver los problemas, además de ayudar a entender los diferentes métodos posibles de resolución, mejorando así el rendimiento académico.

[6] Los autores de este material tuvimos la duda acerca de si incluir o no los nombres de los estudiantes que crearon las definiciones. Nos imaginamos estudiantes que pueden preferir figurar y estudiantes que pueden preferir no figurar. Si el cuadernillo llega a tus manos, reconocés que alguna de las definiciones publicadas es tuya y pensás que te gustaría figurar como autor/a de la misma, contactanos y te incluiremos en la próxima edición del cuadernillo.

Arquímedes: uno de los científicos y en particular matemáticos más grandes de la historia. Nació en Siracusa, Sicilia, parte del pueblo Griego que en ese entonces se extendía por todo el Mediterráneo. Tan valorado era su genio que los romanos que estaban combatiendo con los griegos había prometido no hacerle daño. Pero el soldado que lo encontró no lo reconoció (Facebook no se había inventado todavía hace 2230 años) y lo mató mientras Arquímedes estaba concentrado resolviendo un problema. Algunos de sus inventos como el famoso tornillo que lleva su nombre se siguen usando hoy en día.

Bertrand Russell: uno de los pocos matemáticos que ganó el Premio Nobel. Como Alfred Nobel no creó premio Nobel de matemática Russell se ganó el de Literatura. Educador, filósofo, pensador, polemista. Vivió 97 años luchando por sus ideas, la preservación de la paz, la valoración del conocimiento, y el imperio del amor. La defensa de estas ideas lo llevaron más de una vez a la cárcel.

✍ **Cálculos auxiliares:** a todo ritmo usamos estas hojas con cálculos alocados comprobando, verificando, todas las maneras posibles para llegar al resultado óptimo. Reduciendo; simplificando pasos en las cuentas. Bendita hoja salvadora que muestra el esfuerzo por entender los problemas, reflejando el esfuerzo para llegar a buen término en la resolución de problemas.

Conjetura: una proposición que se supone cierta y está a la espera de una demostración.

Todo el que se dedica a pensar la solución de un problema establece permanentemente conjeturas. Una conjetura es una sospecha, una suposición de que algo seguramente debe ser cierto, aunque no haya todavía argumentos sólidos y convincentes para poder afirmarlo con seguridad. Conjeturar una solución o una respuesta es un paso habitual en la resolución de problemas. Tener una conjetura es tener un rumbo para dirigir el pensamiento y buscar una solución.

Algunas conjeturas deben esperar cientos de años hasta que la matemática alcance el nivel de desarrollo necesario para que puedan ser demostradas y se conviertan en teoremas. Por ejemplo el *Último Teorema de Fermat* fue una conjetura durante 358 años. En 1637, Pierre de Fermat, un jurista que ocupaba su tiempo libre resolviendo problemas matemáticos, dejó en el margen de uno de los libros que estaba leyendo la siguiente anotación.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

En esa época la gente con altos niveles de educación se comunicaba escribiendo en latín. Traducido al castellano Fermat escribió:

Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla.

En la notación algebraica de hoy Fermat podría haber escrito.

$\forall n > 2, n \in \mathbb{Z}$ no existen a, b y $c \in \mathbb{N}$ tales que $a^n + b^n = c^n$

Este problema tan económico a la hora de ser enunciado, mantuvo en vilo y en vela a generaciones de matemáticos. Aunque tardó mucho en resolverse, sirvió como incentivo para que se descubrieran muchos resultados y novedosas técnicas matemáticas.

En 1995 Andrew Wiles, al que ya nombraron Caballero de la Corona Británica –como a los Beatles y a los Rolling Stones–, la terminó de demostrar. En realidad demostró una conjetura más moderna y más general, la de Taniyama-Shimura, que databa de 1955 pero que incluía a la Conjetura de Fermat como un caso particular. La historia de este problema la cuenta maravillosamente bien Simon Singh en [12].

Otras conjeturas siguen abiertas. Un **número perfecto** es aquél que es suma de todos sus divisores menos sí mismo por ejemplo 28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1. ¿Existe un número perfecto impar? Todavía no se sabe responder por sí o por no.

Contraejemplo: ejemplo maldito que sirve para arruinar una conjetura mostrando que es falsa. Son tan poderosos que basta un solo cuervo blanco para echar por tierra la conjetura *Todos los cuervos son negros*. Algunos filósofos de la ciencia opinan que los científicos no son tan rápidos para aceptar los contraejemplos. Por ejemplo en el caso de los cuervos podrían analizar si el cuervo blanco no sufría alguna enfermedad, por ejemplo albinismo (carencia de pigmentos). Lo que hacen estos científicos es una maniobra para salvar la conjetura. Lo que Imre Lakatos llama: *programa de investigación científica*: es excluir el cuervo blanco de la conjetura reescribiéndola de la siguiente manera: *Todos los cuervos negros que gocen de buena salud son negros*. En matemática un cuervo albino suele recibir el nombre de caso patológico o monstruo.

Definición: cuando un matemático se encuentra pensando con mucha frecuencia acerca de una idea nueva y necesita referirse a ella, se vuelve necesario ponerle un nombre. Pero el nombre elegido debe estar acompañado de una explicación que permita distinguir con claridad a esa idea y diferenciarla de otras ideas distintas. Por ejemplo, la palabra *triángulo* designa a un tipo de figura geométrica. La **definición** de *triángulo* es la explicación que permite decidir si una figura geométrica es o no es un triángulo. En la vida cotidiana también se designan las ideas y objetos mediante palabras, pero las definiciones de las palabras pueden ser imprecisas. Si decimos, por ejemplo, "Esperé un *rato* al colectivo", ¿puede ser que lo hayamos esperado 5 minutos? Seguramente sí. ¿Puede ser que lo hayamos esperado 5 años? Seguramente no. ¿Y 5 horas? ¿Es demasiado? ¿después de cuánto tiempo el tiempo de espera deja de ser un *rato*, para pasar a ser otra cosa? El lenguaje cotidiano admite este tipo de imprecisiones y logramos comunicarnos bastante bien, a pesar de ellas. En la matemática esas imprecisiones no son admisibles. La precisión de una definición matemática debe ser absoluta.

Dicen que para pelar una papa hacen falta dos cosas: un cuchillo y una papa. De la misma manera, en matemática, para decidir, por ejemplo, si un número es o no es primo hacen falta dos cosas: un número y saber a qué se llama número primo.

Demostración: cuando hacemos una afirmación matemática existe la posibilidad de que la misma sea verdadera o sea falsa. Para poder asegurar que es cierta, en caso de que lo sea, es necesario construir un argumento convincente para uno mismo y para los demás. Este argumento es lo que llamamos demostración. Convencerse de que algo es cierto puede resultar subjetivo, porque es necesario poder seguir el hilo del razonamiento para que resulte verdaderamente convincente y puede ocurrir que lo que es comprensible y convincente para alguno no lo sea para otro.

El siguiente diálogo entre un estudiante y un Matemático ideal (M.I.) ilustra, con cierta dosis de humor, este aspecto subjetivo de lo que son las demostraciones en la práctica. Fue extraído de *experiencia Matemática* un libro, hoy inhallable, de dos matemáticos estadounidenses (Davis y Hersh) que relata las impresiones de sus dos vidas dedicadas profesionalmente a la matemática. Si bien es un dialogo de ficción se ajusta perfectamente bien a la realidad.

Estudiante: –Profesor, ¿qué es una demostración matemática?

M.I.: –¿Cómo, no sabe *eso*? ¿En que año está usted?

Estudiante: –En tercer año.

M.I.: –¡increíble! ¡Una demostración es lo que me ha visto hacer en clase dos veces a la semana los últimos tres años! ¡Eso es una demostración!

Estudiante: –Le pido mil disculpas. Debí explicarle que estudio filosofía no matemática, y nunca he asistido a sus clases.

M.I.: –¡Ah bueno, en tal caso ...! De todas formas, habrá tenido alguna materia de matemática. ¿Verdad? ¿Conoce la demostración del teorema fundamental del cálculo, o el teorema fundamental del álgebra?

Estudiante: –He visto razonamientos de geometría, de álgebra y de cálculo diferencial que eran llamadas demostraciones. Pero lo que le estoy pidiendo no son *ejemplos* de demostración, si no una definición de demostración. Pues, sin ella, ¿como puedo saber que sus ejemplos son válidos?

M.I.: –Bueno, todo este asunto fue zanjado por el lógico Tarski, me parece, y por algunos otros, seguramente Russell o Peano. De todos modos, lo que hace es expresar los axiomas de la teoría que se trate en un lenguaje formalizado, que utiliza un alfabeto o lista de símbolos dada. A continuación, se escriben las hipótesis de los teoremas en ese mismo simbolismo. Seguidamente, se muestra que mediante reglas de la lógica se pueden ir transformando paso a paso las hipótesis hasta alcanzar la conclusión. Esto es una demostración.

Estudiante: –¿De verdad? ¡Es sorprendente! ¡He cursado varias materias de matemática de análisis, álgebra y geometría, y jamás he visto nada por el estilo!

M.I.: –¡Claro que nadie lo hace! ¡Se tardaría una vida! Basta ver que es posible hacerlo; con eso es suficiente.

Estudiante: –Pero eso ni siquiera se parece a lo que yo he visto en mis cursos y en mis textos. En definitiva, lo cierto es que los matemáticos no hacen demostraciones.

M.I.: –¡Cómo que no! ¡Un teorema no demostrado no es nada!

Estudiante: –En tal caso, ¿Qué es de verdad una demostración? Si ha de ser algo expresado en lenguaje formal y construido por transformaciones de fórmulas, entonces nadie demuestra nada. ¿Hay que saber mucho de lenguajes y lógica formal para poder dar una demostración matemática?

M.I.: –¡Desde luego que no! Cuanto menos se sepa, mejor. A fin de cuentas, todo eso no son más que sinsentidos abstractos.

Estudiante: –Entonces, ¿qué es *de verdad* una demostración?

M.I.: –Bueno, es un razonamiento que convence a quienes conocen bien la cuestión.

Estudiante: –¿A quienes conocen bien la cuestión? Entonces, la definición de demostración es subjetiva, depende de personas concretas. Antes de poder dar por cierto que algo es una demostración tengo que determinar quienes son los expertos capacitados para juzgarla. ¿Qué tiene que ver todo esto con la demostración de algo?

M.I.: –¡No, no! ¡Una demostración no tiene nada de subjetiva! Todo el mundo sabe lo que es. Mire, léase unos cuantos libros, siga los cursos de un matemático competente y enseguida lo entenderá.

Estudiante: –¿Está usted seguro?

M.I.: –Bueno ..., también pudiera ser que usted no tuviera aptitudes. Son cosas que pueden pasar.

Estudiante: –En resumen, que es usted quien decreta lo que es una demostración y lo que no. Y si yo no aprendo a ver las cosas de igual modo que usted, entonces usted decreta que yo carezco de aptitudes.

M.I.: –Si no yo, entonces ¿Quién?

Ensayo y error: intentar y equivocarse: La gimnasia diaria de quien quiere avanzar en cualquier orden de la vida, en cualquier disciplina. Lamentablemente en la mayoría de la educación escolar todavía se penaliza el error, logrando el indeseable efecto que la mayoría no quiera ni siquiera intentar resolver ningún problema por miedo a equivocarse. La matemática no es ajena a esta práctica. En los libros y en la cultura popular la matemática suele presentarse como una ciencia de resultados deductivos perfectamente encadenados que llevan a una conclusión. Pero en la práctica para llegar a esos resultados tan bonitos muchos matemáticos se la pasaron haciendo bollitos con las hojas de intentos fallidos de demostración y tirándolos al tacho a la manera de Manu Ginóbili.

Gauss: contemporáneo de San Martín aunque menos viajero que nuestro Libertador. Nunca salió de su Alemania natal y en sus 50 años de labor dejó una huella más grande que ningún otro matemático. Ya a los 10 años sorprendía a la maestra sumando los números de 1 a 100 en un minuto.

Go: milenario juego de origen chino considerado el juego de los patrones.
`www.aago.org.ar`

Hipótesis: punto de partida de las afirmaciones de la forma: Si se cumple “todo esto” entonces será cierto “esto otro”. El “todo esto” son las hipótesis.

Justificar: para los matemáticos, demostrar.

Lectura: la principal forma de adquirir conocimiento todavía no destronada por otras alternativas.

Lógica: disciplina que crea reglas para que mediante los razonamientos válidos se puedan deducir verdades a partir de verdades. Se cuenta sobre Bertrand Russell que, mientras explicaba en clase que «de una proposición falsa podía extraerse cualquier consecuencia», un alumno le interrumpió diciéndole: “¿Quiere usted decir que si aceptamos que 2+2=5, entonces podemos concluir que usted es el Papa de Roma?”. Russell contestó inmediatamente: Mire, si 2+2=5, reste usted 2 y obtendrá que 2=3, o sea, que 3=2; y si ahora resta usted 1 a ambos miembros, obtendrá que 2=1. Puesto que el Papa y yo somos dos, y puesto que 2=1, estará usted de acuerdo conmigo en que el Papa y yo somos uno, luego yo soy, en efecto, el Papa de Roma.

Logicismo: conjunto de ideas que sostienen que la matemática es una parte de la lógica o simplemente lógica aplicada. Estas ideas tuvieron su legión de adeptos a principios del siglo XX, pero hoy están con el rating muy bajo.

Matemática: ciencia de los patrones.

Música: arte de los patrones.

Mutatis mutandis: «es una frase en latín que significa *cambiando lo que se deba cambiar...* Informalmente el término debe entenderse *de manera análoga haciendo los cambios necesarios*» (Wikipedia). En alguna época el latín fue el idioma de la ciencia (como hoy lo es el inglés) y muchas de sus expresiones han llegado hasta nuestros días y es común encontrarlas en textos de diversas disciplinas.

Patrón: cualquier conjunto de objetos que incluye cierta estructura entre ellos. Con objeto nos referimos a la palabra en el sentido más amplio, incluyendo entre ellos a objetos abstractos como números, relaciones, funciones, figuras geométricas, etc. Por ejemplo, ¿qué patrón pueden encontrar en esta serie de números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ? ¿Cómo sigue la serie?

✍ **Pick, teorema de:** es una fórmula que relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras (polígonos reticulares) con el número de puntos en su interior y en su borde (frontera) que tengan coordenadas enteras.

$$A = I + \frac{B}{2} - 1,$$

donde A es el área del polígono, I es el número de puntos interiores y B es el número de puntos en el borde.

Proposición: afirmación.

Simplismo: tendencia a pensar que con cuatro palabras podemos definir cualquier cosa, cuando disciplinas como la matemática o la música son mucho más complejas e imposibles de definir en forma tan breve.

Tanteo: la mayoría de las veces los problemas matemáticos son como un cuarto oscuro. El tanteo es como ir moviéndose lentamente para no llevarse muebles ni objetos por delante buscando la puerta para salir.

Teclado: la principal forma de comunicarse, interactuar activamente con una computadora todavía no desterrada por otras alternativas.

Teorema: tesis que se deduce mediante razonamientos lógicos a partir de hipótesis verdaderas.

Tésis: proposición que se deduce de otras llamadas hipótesis y que conforma la conclusión de los razonamientos dando lugar a un teorema.

X: variable más común para representar una cantidad desconocida.

Apéndice D: Bibliografía

[∗] ACERCAMIENTO NO TRADICIONAL

Libros de acercamiento a la matemática por caminos no tradicionales. Suelen ser recopilaciones de temas, artículos de divulgación, matemática recreativa o bien obras estrictamente literarias, pero que, a nuestro juicio, guardan algún tipo de vínculo con la matemática o, al menos, coinciden con ella en aspectos estéticos.

[1] Pablo Amster, *La Matemática como una de las Bellas Artes*, Siglo XXI, Buenos Aires. 128 páginas.
Este libro tiende puentes inimaginables entre la matemática y otras disciplinas que prejuiciosamente podríamos considerar muy distantes, como la poesía, la música, la literatura en general y la filosofía. Para los lectores que consideran sus propias inquietudes intelectuales ajenas a la matemática, este libro puede ser una puerta de acceso a un mundo inexplorado en el que les sorprenderá encontrar algunas caras familiares.

[2] Italo Calvino, *Las cosmicómicas*, Minotauro.
Una serie de deliciosos cuentos sobre el origen y la evolución del universo, relatados en primera persona por QWFWQ, testigo privilegiado desde los sucesos previos al big bang hasta a la actualidad. Ciencia, humor y la admirable narrativa de Calvino.

[3] Italo Calvino, *Tiempo Cero*, Minotauro.

[4] Denis Guedj, *El teorema del loro*, Anagrama, Madrid, 2000, 583 páginas.
Una novela con trama de espionaje. Un anciano recibe por correo un container lleno de libros de matemática. Se trata de la biblioteca personal de un antiguo compañero suyo de estudios, cuyo paradero es desconocido. El anciano, que no es matemático sino filósofo, se propondrá ordenar esa biblioteca. Eso lo llevará a recorrer la historia de la matemática y reconocer sus distintas ramas, haciendo al lector testigo de esta investigación y aprendiendo matemática junto a él, en el transcurso del relato. Paralelamente, tendrá oportunidad de indagar a qué se debe la misteriosa desaparición de su antiguo compañero.

[5] Adrián Paenza, *Matemática... ¿Estás ahí?*, Siglo XXI, Buenos Aires 2005, 240 páginas.
Adrián Paenza, un matemático que aprovecha su figura mediática para la noble tarea de difundir la ciencia, reúne en esta serie de 5 libros un compendio de acertijos, juegos lógicos y curiosidades matemáticas, explicados y discutidos en lenguaje coloquial, para que todos los lectores puedan sorprenderse y divertirse.

[6] Adrián Paenza, *Matemática...¿Estás ahí? Episodio 2*, Siglo XXI, Buenos Aires 2006, 240 páginas.

[7] Adrián Paenza, *Matemática...¿Estas ahí? Episodio 3,14*, Siglo XXI, Buenos Aires 2007, 240 páginas.

[8] Adrián Paenza, *Matemática...¿Estas ahí? Episodio 100*, Siglo XXI, Buenos Aires 2008, 260 páginas.

[9] Adrián Paenza, *Matemática...¿Estas ahí? la vuelta al mundo en 34 problemas y 8 historias*, Siglo XXI, Buenos Aires 2010, 224 páginas.

[10] David Perkins, *La bañera de Arquímedes y otras historias del descubrimiento científico: el arte del pensamiento creativo*, Paidós, Barcelona, 2003, 302 páginas.

[11] George Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1965, 205 páginas.

[12] Simon Singh, *El último teorema de Fermat*, Norma, Bogotá, 1999, 464 páginas.
Cuenta la historia de la resolución de un problema matemático planteado en el siglo XVII, recorriendo biografías de matemáticos involucrados, anteriores y posteriores. Pero, por sobre todas las cosas, pinta de una manera impecable los sufrimientos y avatares que transita un investigador solitario obsesionado por un problema. La expectativa por la resolución parece por momentos la trama de una novela de suspenso.

[13] Simon Singh, *Los códigos secretos*, Debate, 382 páginas.
Cuenta la historia de la codificación y desciframiento de los mensajes secretos, desde los antiguos romanos, hasta las contraseñas de seguridad de nuestras tarjetas de crédito, pasando, por ejemplo, por la historia de cómo hicieron los Aliados para quebrar a la máquina encriptadora de los nazis, la famosa "Enigma", y definir así la Segunda Guerra Mundial.

[14] Raymond Smullyan, *¿Cómo se llama este libro?*, Cátedra, Madrid, 1978.

[15] Raymond Smullyan, *¿La dama o el tigre?*, Cátedra, Madrid, 1982.

[16] Raymond Smullyan, *Alicia en el país de las adivinanzas*, Cátedra, Madrid, 1984.

[17] Raymond Smullyan, *Satan, Cantor y el infinito*, Gedisa, Barcelona, 1995.

[18] Raymond Smullyan, *Caballeros, bribones y pájaros egocéntricos*, Gedisa, Barcelona, 2002.

[19] Raymond Smullyan, *Bosques curiosos y pájaros aristocráticos*, Gedisa, Barcelona, 2002.
Raymond Smullyan creó un género, el de los enigmas lógicos. Con divertidos desafíos es capaz de adentrarnos en profundos resultados de la lógica, la matemática, la teoría de la computabilidad y la informática. ¡Consigue el increíble resultado de ponernos a resolver problemas matemáticos sin que nos demos cuenta!

[20] Raymond Smullyan, *Juegos y problemas de ajedrez para Sherlock Holmes*, Gedisa, Barcelona, 1979.
Raymond Smullyan, nos introduce con su maestría para narrar en el mundo de los problemas de ajedrez retrospectivo o retrógrado. Los problemas de ajedrez son en realidad problemas de lógica que exigen toda la capacidad deductiva de los lectores para salir airosos. Hay un ejemplo en la Figura B.35 de la página 127 del apéndice de figuras.

[21] Raymond Smullyan, *Juegos de ajedrez y los misteriosos caballos de Arabia*, Gedisa, Barcelona, 1981.

[22] Germán Bernabeu Soria, *100 problemas matemáticos*, CEFIRE de ELDA, Alicante, 2002.

[23] Ian Stewart, *De aquí al infinito*, Crítica, Barcelona, 1998.

[24] Ian Stewart, *Locos por las matemáticas*, Crítica, Barcelona, 2004.

[25] Ian Stewart, *Cómo cortar un pastel y otros rompecabezas matemáticos*, Crítica, Barcelona, 2006.

[26] Ian Stewart, *Belleza y verdad, Crítica*, Barcelona, 2007.

[27] Ian Stewart, *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*, Crítica, Barcelona, 2007.
Stewart tiene, con sus libros, el don extraordinario de hacer no sólo comprensibles, sino incluso apasionantes las matemáticas avanzadas, incluyendo sus descubrimientos más recientes, como la demostración final del último teorema de Fermat, las nuevas aportaciones a la teoría de nudos, el teorema de los cuatro colores, los modelos del caos, los fractales y "las dimensiones dos y medio".

[28] Malba Tahan, *El hombre que calculaba*, Editorial PLUMA Y PAPEL, 2008, 288 páginas.
Este clásico de la divulgación cuenta las andanzas del calculista Beremiz Samir por la antigua Persia y cómo de la mano de la matemática y su sabiduría resuelve mil situaciones para abrirse paso en la corte del sultán y comer perdices.

[29] Martin Gardner, *Rosquillas Anudadas*, RBA LIBROS, 2010, 302 páginas.

[30] Martin Gardner, *¡AJA! Inspiración*, RBA LIBROS, 2009, 355 páginas.

[31] Martin Gardner, *El idioma de los espias, cómo construir y descifrar mensajes secretos*, Juegos & Co, Buenos Aires, 2006, 112 páginas.

[32] Martin Gardner, *Matemática para divertirse*, Juegos & Co, Buenos Aires, 1999, 162 páginas.

[33] Martin Gardner, *Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas*, Gedisa, Barcelona, 2002.
Su obra de divulgación de la matemática fue la inspiración para muchas personas se inclinaran al estudio de la matemática o simplemente pudieran percibir las maravillas que viven allí dentro. Todos sus libros son tesoros altamente recomendables para adentrarse al mundo matemático.

[∗] ACERCAMIENTO TRADICIONAL

Este acercamiento se realiza a través de libros técnicos, de textos, dedicados a un tema específico. Es así como van a estudiar en la enorme mayoría de las materias de la carrera. Los que mencionamos son algunos libros de nivel secundario y universitario que encontrarán en la Biblioteca y otros de nivel universitario que nos gustan mucho y que a nuestro juicio se diferencian de otros de similares contenidos.

[34] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 1: Funciones 1*, Longseller, Buenos Aires.
Toda esta serie de libros está dirigida a alumnos de escuela media. Pero el tratamiento de los temas es fundamentado tanto como el conocimiento matemático de los lectores lo permite. Presentan muchos ejemplos de aplicaciones concretas, problemas resueltos y discutidos y una gran variedad de problemas y ejercicios para practicar. Son una buena fuente de consulta para recordar temas que se supone estudiados en la escuela secundaria o para cubrir aquellos que no hayan llegado a dominarse.

[35] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 2: Funciones 2*, Longseller, Buenos Aires.

[36] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 3: Números y sucesiones*, Longseller, Buenos Aires.

[37] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 4: Vectores*, Longseller, Buenos Aires.

[38] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 5: Análisis 1*, Longseller, Buenos Aires.

[39] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 6: Análisis 2*, Longseller, Buenos Aires.

[40] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 7: Matrices*, Longseller, Buenos Aires.

[41] Silvia Altman, Claudia Comparatore, Liliana Kurzrok, *Matemática 8: Probabilidad y estadística*, Longseller, Buenos Aires.

[42] Adriana Aragón, Juan Pablo Pinasco, Claudio Schifini, Alejandro Varela, *Introducción a la matemática para el primer ciclo universitario*, Universidad de General Sarmiento, Buenos Aires, 2004, 459 páginas.

[43] María Elena Becker, Norma Pietrocola, Carlos Sánchez, *Notas de Aritmética*, Red Olímpica, Buenos Aires
Es un libro donde se encuentran las nociones básicas de la aritmética con varios problemas interesantes resueltos que brindan muy buenas estrategias a la hora de hacer aritmética y muchos más problemas propuestos para pensar.

[44] María Elena Becker, Norma Pietrocola, Carlos Sánchez, *Notas de Combinatoria*, Red Olímpica, Buenos Aires
Es un libro donde se encuentran las nociones básicas de combinatoria con varios problemas interesantes resueltos que brindan muy buenas estrategias a la hora de hacer combinatoria y muchos más problemas propuestas para pensar.

[45] Gustavo Carnelli, Marcela Falsetti, Mabel Rodríguez, Alberto Formica, *Matemática para el aprestamiento universitario*, Universidad de General Sarmiento, Buenos Aires, 2007, 264 páginas.

[46] José Cólera, Miguel de Guzmán, María del Carmen Bas, Ignacio Gaztelu, María José Oliveira, *Matemáticas 1*, Anaya, Madrid, 1996.

[47] M. de Guzmán, J. Colera, A. Salvador, *Bachillerato 1, 2 y 3.*
Son libros donde se encuentran las contenidos del colegio secundario y algunos más también en los tomos 2 y 3, tratados de una manera más acorde con la idea de este taller. Además de poder usarlos de consulta sobre los contenidos en cuestión tienen una buena introducción a cada uno de los temas, con reseñas históricas que ayudan a comprender mejor el porqué, y cuentan también con muchas curiosidades interesantes.

[48] Cecilia Parra (dir.), *Matemática, fracciones y números decimales 7° grado: apuntes para la enseñanza*, Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2005.

[49] Gilbert Strang, *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Thomson International, 2007, 496 páginas
Pocos matemáticos tienen la elocuencia y la capacidad de hacer claro lo complejo que tiene Gilbert Strang, profesor del MIT. Si alguna vez tienen que tomar un curso de álgebra lineal podrán experimentar en carne propia lo que acá escribimos.

[50] Michael Spivak, *Calculus*, Editorial Reverté S.A., Barcelona.

[∗] PÁGINAS Y SITIOS DE INTERNET

Internet es una fuente prácticamente inagotable de recursos sobre matemática y cultura en general. Aquí una pequeña muestra de sitios y páginas en castellano. El horizonte se ensancha más si uno domina otro/s idioma/s.

[51] http://www.decadavotada.com.ar/
Esta aplicación muestra las más de 3.000 votaciones nominales de la Cámara de Diputados desde 2001 y del Senado de la Nación Argentina desde 2004, y de la Legislatura de la Ciudad de Buenos Aires desde 2016 de acuerdo a las actas oficiales (diputados, senadores y legislatura).

[52] http://www.divulgamat.net/
Un sitio que como su nombre los sugiere se dedica a la divulgación de la matemática.

[53] https://elgatoylacaja.com.ar/
Un sitio donde se hace ciencia y se populariza la ciencia. Abarrotado de lecturas que te transforman, te muestran que la ciencia es de todas las personas y te invitan a quererla y defenderla.

[54] http://espejo-ludico.blogspot.com/
Un sitio donde lo lúdico esta continuamente cruzado por la matemática.

[55] http://www.gaussianos.com/
Un blog español dedicado enteramente a sucesos y cultura matemática.

[56] http://geogebra.org/
Soft gratuito para trabajar, experimentar y aprender matemática investigando.

[57] https://www.instagram.com/molinerd/
Cuenta de Instagram del comediante Pablo Molinari. Entre muchas otras cosas, Pablo tiene una experiencia y sensibilidad matemática que pone al servicio del humor, para ilustrar, con gráficos y recursos matemáticos diversos, variadas circunstancias de la vida cotidiana.

[58] http://mate.dm.uba.ar/~cepaenza/libro/LIBRO_PAENZA.htm
Links oficial a los libros de Paenza. Que se pueden descargar en forma gratuita.

[59] http://maxima.sourceforge.net/es/
Máxima un sistema de álgebra computacional gratuito y muy poderoso.

[60] http://miktex.org/
Organización sobre edición de textos matemáticos.

[61] https://www.microsiervos.com
Dicen sus autores: “Solemos describirlo como un blog de divulgación sobre tecnología, ciencia, Internet y muchas cosas más, pero lo cierto es que es más complejo que todo eso: tiene muchas anotaciones de humor y otros temas muy variados que nos interesan a los autores, como la astronomía y la aviación, los juegos de azar, las leyendas urbanas, los gadgets, las grandes o pequeñas conspiraciones o los puzzles. También publicamos reseñas de libros y películas, algunas vivencias personales, de nuestros respectivos trabajos o de gente cercana, y cualquier otra cosa que nos apetece.”

[62] http://www.oei.es/oim/

[63] http://www.oei.es/oim/revistaoim/
Estos dos últimos, el sitio de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, con la revista de la OIM.

[64] http://www.oma.org.ar/
El sitio de la Olimpíada Matemática Argentina muy buen material de resolución de problemas.

[65] https://www.openstreetmap.org/
OpenStreetMap es un mapa del mundo, creado por gente como tú y de uso libre bajo una licencia abierta.

[66] www.rae.es
El sitio oficial de la Real Academia Española, que siempre es una referencia para consultar dudas acerca de nuestro idioma.

Índice general